

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2020-2021
SESSION 1 DE PRINTEMPS



Parcours/Étape: L3 Informatique **Code UE:** 4TIN602U
Épreuve: Techniques Algorithmiques et Programmation
Date: 30/04/2021 **Heure:** 9h **Durée:** 1h30
 Documents: voir les consignes ci-dessous
 Épreuve de M. Cyril GAVOILLE

université
de **BORDEAUX**

**Collège Sciences
et Technologie**

C O N S I G N E S

Toutes vos réponses sont à saisir dans le fichier `reponses.txt` accompagnant le sujet, et qui sera à déposer sur la page [Moodle](#) du cours. Il est impératif de ne pas renommer ce fichier de réponses, ni de le compresser ou de changer son format. Vous pouvez mettre des commentaires directement dans `reponses.txt` si cela vous semble nécessaire. Enfin, ne cherchez pas à me remettre votre sujet (.pdf) que je possède déjà.

Le sujet comporte **0000** pages. Vous avez le droit d'utiliser les documents accessibles sur la [page de l'UE](#), en particulier les [notes de cours](#), ainsi que vos propres fichiers (notes et programmes de TP). Il s'agit d'un devoir individuel. Tout constat de manquement à cette consigne sera sanctionné.

Distance du roi

Dans cette partie, on considère uniquement des points à coordonnées entières ainsi que la distance du roi sur l'échiquier, qu'on notera d_{\max} . On rappelle qu'un roi placé sur une case d'un échiquier peut visiter en un coup les 8 cases autour de lui, pour peu qu'il ne soit pas sur un bord. C'est aussi la distance dans le graphe composé d'une grille à laquelle on ajoute les diagonales. Plus formellement, si $A = (x_A, y_A)$ et $B = (x_B, y_B)$ sont deux points, alors $x_A, y_A, x_B, y_B \in \mathbb{Z}$ et $d_{\max}(A, B) = \max\{|x_A - x_B|, |y_A - y_B|\}$.

Q1a. Calculer la distance d_{\max} entre les points $(8, -4)$ et $(-5, -6)$.

Soient V un ensemble de n points (à coordonnées entières donc) et P une tournée pour l'entrée (V, d_{\max}) du voyageur de commerce. Ici, une tournée sera la suite des n points de V donnés dans l'ordre de visite des points. Une arête de P est simplement le segment de droite liant deux points consécutifs de P , le dernier et le premier étant considérés comme consécutifs. Pour résumer, si v_i et v_j sont deux points consécutifs de P , alors l'arête $v_i - v_j$ est une ligne droite et sa longueur vaut $d_{\max}(v_i, v_j)$.

Un *croisement* de P est un ensemble de deux arêtes de P qui s'intersectent, les extrémités ne pouvant faire partie de l'intersection.

Q1b. Proposez un ensemble V d'au plus 7 points ainsi qu'une tournée P ayant un croisement tout en étant de longueur minimum pour (V, d_{\max}) . Votre tournée, si elle existe, devra impérativement comporter les points $(-6, -2)$ $(3, -2)$.

Q1c. Est-il possible d'avoir une tournée avec deux croisements ? dans les mêmes conditions que la question précédente, c'est-à-dire de longueur minimum, comportant au plus 7 points et passant par les points $(-6, -2)$ $(3, -2)$.

Questions de cours

Mise en garde. Si les questions de cette partie sont essentiellement l'application du cours, elles nécessitent cependant chacune un peu de réflexion. Méfiez-vous des réponses automatiques !

Q2a. Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont fausses ?

- L'heuristique h dans A^* peut être monotone et sous-estimer toutes les distances.
- Une instance particulière d'un problème indécidable peut être résolue par un programme \mathbf{C} .
- Pour un problème donné, un algorithme d'approximation a toujours une complexité en temps plus faible qu'une heuristique.
- Dans un graphe (G, ω) arête-valué par une fonction de poids ω , toute arête $u - v$ est un plus court chemin entre u et v .
- Le problème du voyageur de commerce est indécidable.
- Les problèmes indécidables n'ont pas de solution algorithmique.
- Pour un problème de complexité polynomiale, une heuristique est de complexité au plus polynomiale.
- L'heuristique h dans A^* peut être monotone et sur-estimer toutes les distances pour G , c'est-à-dire vérifier $h(x, y) > \text{dist}_G(x, y)$ pour toute paire de sommets (x, y) où h est définie.
- La complexité en temps d'un algorithme est au moins sa complexité en espace.
- Pour un problème donné, une heuristique a toujours une complexité en temps plus faible qu'un algorithme exact.
- Un algorithme pour un problème donné peut boucler à l'infini sur certaines de ces instances.
- En \mathbf{C} on peut déterminer si un ensemble $X \subseteq \{0, \dots, n - 1\}$ possède k éléments en temps $O(k)$ au lieu de $O(n)$, si X est codé sur un `int` ou un `long`.

Q2b. L'algorithme A^* , dont l'heuristique h est monotone, est (une seule réponse) :

- Un algorithme exact.
- Une heuristique quelconque.
- Un algorithme d'approximation.

Question sur A^*

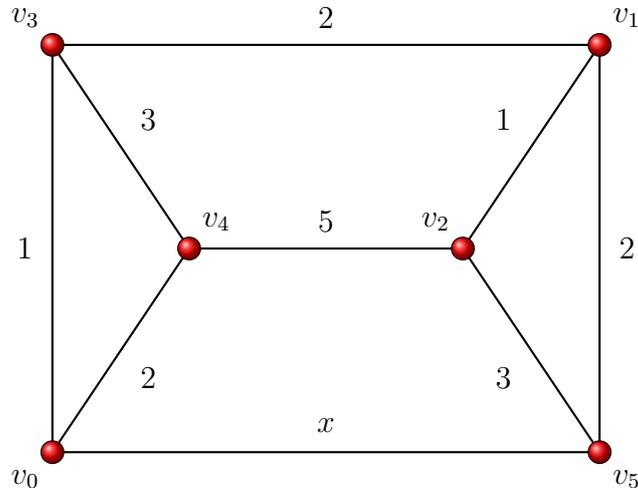
On considère un graphe orienté symétrique (G, ω) arête-valué. Le terme "orienté symétrique" signifie que si (u, v) est un arc, alors (v, u) est aussi un arc. On suppose que la valuation ω est telle qu'il existe une fonction positive f telle que pour tous voisins u, v , $\omega(u, v) = f(v)$ et $\omega(v, u) = f(u)$. La valuation n'est donc, elle, pas forcément symétrique puisque il est possible d'avoir $\omega(u, v) \neq \omega(v, u)$. Il suit que $\text{dist}_G(u, v)$ n'est pas forcément symétrique.

C'est le cadre du TP pour A^* où le poids d'un arc (u, v) entre deux cases voisines ne dépendait que de la "texture" de la case d'arrivée v .

Q3. Si $f(s) = f(t)$, c'est-à-dire que les points de départ et d'arrivée sont de même texture, déterminer si oui ou non on a toujours $\text{dist}_G(s, t) = \text{dist}_G(t, s)$? Une justification est attendue.

Plus courts chemins et TSP

On considère le graphe arête-valué (G, ω) dessiné ci-dessous où le poids $\omega(v_0, v_5)$ est un réel x inconnu. On supposera que $\omega(u, v) \geq 0$ pour toute arête $u - v$.



Pour toute paire de sommets (u, v) , on définit la fonction d comme ceci :

$$d(u, v) = \begin{cases} \omega(u, v) & \text{si } u \text{ et } v \text{ sont voisins} \\ \text{dist}_G(u, v) & \text{sinon} \end{cases}$$

Q4a. *Donnez une valeur entière pour x , si elle existe, de façon à ce que la fonction d viole l'inégalité triangulaire.*

Q4b. *Donnez un intervalle I de valeurs pour x de sorte que la fonction d vérifie l'inégalité triangulaire si et seulement si $x \in I$.*

Vous devrez préciser si l'intervalle est fermé, semi-ouvert ou ouvert, comme par exemple $[7, 15]$, $[7, 15[$ ou $]7, 15]$]0, 0[ou par $[2, -1]$. En fait, la virgule n'est pas nécessaire. Pour coder $+\infty$ et $-\infty$ vous utiliserez les mots `+inf` et `-inf` respectivement.

Dans toute la suite du problème, on fixe $x = 3$.

Q4c. *Donnez les distances pour toutes les paires de sommets de G , c'est-à-dire $\text{dist}_G(v_i, v_j)$ pour tout $i, j \in \{0, \dots, 5\}$. Par symétrie, seules les entrées avec $i < j$ sont demandées.*

On pose $V = \{v_0, \dots, v_5\}$ l'ensemble des sommets de G , x étant toujours fixé à 3. On considère maintenant (V, dist_G) comme une instance du problème du voyageur de commerce. Dans ce cadre, chaque $v_i \in V$ peut être vu comme un point, et la distance entre les points v_i et v_j sera donnée par $\text{dist}_G(v_i, v_j)$. Comme dans le cours, on notera $n = |V| = 6$ et $V^* = V \setminus \{v_{n-1}\} = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

Pour tout sous-ensemble $S \subseteq V^*$ et point $t \in S$, on considère $D(t, S)$ la variable comme définie dans les notes de cours au paragraphe 3.3 (page ~ 80).

Q4d. *Calculer les valeurs $y_1 = D(v_0, \{v_0\})$ et $y_2 = D(v_3, \{v_3\})$.*

Q4e. *Calculer la valeur $y_3 = D(v_3, \{v_3, v_4, v_2\})$.*

Notation asymptotique

Q5a. Parmi les notations asymptotiques ou expressions suivantes, quelles sont celles qui sont à éviter (s'il y en a) :

- a. $O(2n + 1)$
- b. $2^{O(n)}$
- c. $2n + 1 = O(n^2)$

Q5b. Parmi les expressions suivantes sur les asymptotiques, lesquelles sont incorrectes ?

- a. $2n - \lceil \sqrt{n} \rceil = O(n \log n)$
- b. $n + n^2 = \Omega(n^3)$
- c. $2^n = \Omega(2^{n/8}) = 2^{n/8 - O(1)}$
- d. $n^2 = O(2^{n/2})$

Q5c. Dans le cours il est donné la formule de Stirling fournissant un équivalent asymptotique pour $n!$. Plus précisément $n! \sim (n/e)^n \sqrt{2\pi n}$. Est-il vrai que cette formule asymptotique implique que $\ln(n!) = O(n)$?

Q5d. Pour un entier $n > 0$, combien vaut la somme $n - 1 + n - 2 + n - 3 + \dots + 2 + 1$? Indiquez parmi les expressions ci-dessous toutes celles correspondant à cette somme (s'il y en a une!).

- a. $(n - 1)!$
- b. $n^2/2$
- c. $\sum_{i=0}^n i$
- d. $(n - 1)(n - 2)/2$
- e. $n(n - 1)/2$
- f. $\binom{n-1}{2}$
- g. $\binom{n}{2}$
- h. $(n - 1)^2/2$
- i. $\sum_{i=0}^{n-1} i$
- j. n^2
- k. $n!$