
Vous avez droit à une feuille recto-verso de notes personnelles.

Complexité de communication

Question 1. Expliquez ce qu'est un protocole de communication qui calcule une fonction booléenne f , et quel est l'objectif recherché. À quel problème d'algorithmique distribué vu en cours la complexité de communication nous a-t-elle servi ?

On considère la fonction booléenne $gt_n(x, y) \in \{0, 1\}$ qui étant donné deux mots binaires x, y de n bits chacun renvoie 1 si et seulement si « $x > y$ » (*greater-than*), c'est-à-dire si l'entier codé en binaire par x est strictement supérieur à l'entier codé par y . Par exemple, $gt_2(11, 01) = 1$ car « $11 > 01$ ». En effet, $11_{\text{deux}} = 3_{\text{dix}} > 1_{\text{dix}} = 01_{\text{deux}}$.

Question 2. Donnez la matrice de toutes entrées de gt_n pour $n = 2$.

On rappelle qu'un ensemble discriminant pour une fonction booléenne f et une valeur $v \in \{0, 1\}$ est un ensemble F_v d'entrées (x, y) pour f tel que, pour tout $(x, y) \neq (x', y') \in F_v$, $f(x, y) = f(x', y') = v$ et $\bar{v} \in \{f(x, y'), f(x', y)\}$, où $\bar{v}$ est la valeur complémentaire de v , soit $\bar{v} = 1 - v$. Cela revient donc à dire qu'on ne peut pas avoir $f(x, y') = f(x', y) = v$.

Question 3. Donnez un ensemble discriminant F_0 pour gt_2 le plus grand possible. Même question pour un ensemble discriminant F_1 .

Question 4. Généralisez la question précédente à tout n et montrez une borne inférieure, fonction de n , sur le nombre de scripts minimum de tout protocole de communication calculant gt_n . En déduire la complexité de communication de gt_n .

Bellman-Ford

Dans le cours, nous avons vu l'algorithme de Bellman-Ford distribué (BFD) permettant de calculer, dans le cas asynchrone, un arbre couvrant de plus courts chemins dans un graphe G depuis un sommet racine r_0 fixé. Le principe, pour un sommet u , est d'envoyer la longueur d du chemin courant à r_0 à tous ses voisins dès que cette distance diminue tout en mettant à jour son père.

On rappelle qu'un graphe (G, ω) est dit *valué* (on dit parfois *pondéré*) si chaque arête uv possède un certain poids $\omega(uv) \in \mathbb{R}^+$. Bien évidemment, un arbre couvrant de plus courts chemins dans un graphe valué doit tenir compte du poids de ses arêtes. Un graphe est dit *non valué* si chaque arête a un coût unitaire.

Question 5. Donnez une description de BFD, c'est-à-dire le pseudo-code comme vu en cours pour un sommet u quelconque, lorsque le graphe G est valué. Vous supposerez que la racine r_0 est connue de u ainsi que $\omega(uv)$ pour chaque voisin v de u .

Question 6. Modifiez votre pseudo-code de façon à ce que chaque sommet u possède, en plus de la variable $PERE(u)$, une variable $FILS(u)$ contenant tous ses fils dans l'arbre calculé par BFD.

Question 7. Décrivez un graphe non valué à n sommets et un scénario catastrophe où BFD produit $\Omega(n^3)$ messages.

Pour un graphe G sur lequel s'exécute BFD, on notera D le diamètre du graphe, n le nombre de sommets et m le nombre d'arêtes.

Pour tout sommet u , on note $\mu(u)$ le nombre de fois où le sommet u met à jour sa variable locale $\text{LAYER}(u)$ durant l'exécution de BFD dans le pire des scénarios. On a vu que le nombre de messages produits par l'algorithme étant plus petit que $\sum_{u \in V(G)} \mu(u) \cdot \deg(u) \leq 2m\mu$, où $\mu = \max_{u \in V(G)} \mu(u)$. Nous avons aussi vu, dans le cas non valué, que $\mu < n$.

Question 8. *Tout en justifiant, donnez un majorant du nombre de messages de BFD sur un graphe non valué dans le cas d'un scénario synchrone.*

Pour tout réel $\alpha \in [0, 1]$, on dira qu'un scénario est α -synchrone si chaque message prend un temps au moins α pour traverser une arête. Dit autrement, le temps de traversée de chaque message prend un temps imprévisible de $[\alpha, 1]$. Le cas 1-synchrone correspond au cas synchrone et 0-synchrone au cas asynchrone.

Question 9. *Donnez un majorant du nombre de messages BFD lors d'un scénario α -synchrone dans le cas non valué, en fonction des paramètres n, m, D et bien sûr α que vous pourrez supposer non nul.*

Question 10. *En supposant que les poids des arêtes du graphe G sont des entiers de $\{1, \dots, W\}$, donnez un majorant sur le nombre de messages générés par BFD dans ce cas.*

Question 11. *Même question si, de plus, le scénario est α -synchrone.*

Étant donné un graphe G et un sommet r_0 , soit $\Gamma(G, r_0)$ l'ensemble de tous les chemins simples¹ de G issus de r_0 . Si le graphe est valué par ω , on notera $\omega(P)$ le coût d'un chemin P , la somme des poids de ses arêtes, en posant $\omega(P) = 0$ si $P = \{r_0\}$ n'a pas d'arête. Notez que les chemins de $\Gamma(G, r_0)$ ne dépendent pas de ω et possèdent entre 0 et $n - 1$ arêtes. Il est facile de voir, par exemple, que si G est un chemin et r_0 une de ses extrémités, alors $|\Gamma(G, r_0)| = |V(G)| = n$.

Soit $\mathcal{W}(G, \omega, r_0) = \{\omega(P) : P \in \Gamma(G, r_0)\}$, c'est-à-dire l'ensemble des coûts possibles pour les chemins de $\Gamma(G, r_0)$. Notez que $|\mathcal{W}(G, \omega, r_0)| \leq |\Gamma(G, r_0)|$, puisqu'au pire les chemins ont des coûts tous différents. Il y a égalité dans l'exemple précédent, où G est un chemin et r_0 une de ses extrémités.

Question 12. *Décrivez un exemple de graphe à n sommets avec un sommet r_0 où $|\mathcal{W}(G, \omega, r_0)| = O(1)$ alors que $|\Gamma(G, r_0)| = \Omega(n^2)$. Pensez à un graphe de petit diamètre.*

Question 13. *Majorez le nombre de messages pour BFD appliqué à (G, ω) depuis r_0 en fonction des paramètres précédents, notamment $|\Gamma(G, r_0)|$ et/ou $|\mathcal{W}(G, \omega, r_0)|$. Justifiez.*

FIN.

1. Soient de chemins ne passant pas deux fois par le même sommets.