
Vous avez droit à une feuille recto-verso de notes personnelles.

Question de cours

Question 1. *Rappelez les principales caractéristiques des modèles LOCAL, CONGEST et b-CONGEST.*

Question 2. *Expliquez à quoi correspond le problème d'algorithmique distribué de la « détection d'un H » dans le graphe G , pour un graphe H fixé ? [NB : On ne demande pas sa solution.]*

Question 3. *Donnez le principe d'un algorithme dans le modèle LOCAL permettant de détecter un C_6 , un cycle de longueur six, dans un graphe G . Précisez le nombre de rondes.*

Question 4. *En déduire un algorithme de détection de C_6 dans le modèle CONGEST, en précisant sa complexité en temps. Exprimez cette complexité en fonction du degré maximum Δ du graphe G .*

Complexité de communication

Question 5. *Expliquez ce qu'est un protocole de communication qui calcule une fonction booléenne f ? Quelles en sont les principales règles ? Quel est l'objectif recherché ?*

Question 6. *Expliquez le principe du protocole « trivial » pour le calcul de f . Quel est son coût ?*

On considère la fonction booléenne $\text{near}_n(x, y) \in \{0, 1\}$ qui étant donnés deux mots binaires x, y , chacun de n bits, renvoie 1 si et seulement si « $|x - y| \leq 1$ », c'est-à-dire si les entiers représentés en binaires par les mots x et y diffèrent d'au plus une unité. Par exemple, $\text{near}_2(11, 10) = 1$ car $|3 - 2| \leq 1$. En revanche, $\text{near}_2(01, 11) = 0$ car $|1 - 3| \not\leq 1$. Bien évidemment, $\text{near}_n(x, x) = 1$ pour tout $x \in \{0, 1\}^n$.

Question 7. *Donnez la matrice de la fonction near_n pour $n = 2$.*

On rappelle qu'un ensemble discriminant pour une fonction booléenne f et une valeur $v \in \{0, 1\}$ est un ensemble F_v d'entrées (x, y) pour f tel que, pour tout $(x, y) \neq (x', y') \in F_v$, $f(x, y) = f(x', y') = v$ et $\bar{v} \in \{f(x, y'), f(x', y)\}$, où $\bar{v} = 1 - v$ est la valeur complémentaire de v . Cela revient donc à dire qu'on ne peut pas avoir $f(x, y') = f(x', y) = v$.

Question 8. *Donnez un ensemble discriminant F_1 pour near_2 le plus grand possible et donnez sa cardinalité. Même question pour un ensemble discriminant F_0 .*

Question 9. *Expliquez la structure de la matrice de la matrice near_n pour $n \geq 3$.*

Question 10. *Rappelez la définition de $\text{CC}(f)$, la complexité de communication d'une fonction booléenne f .*

Question 11. *Généralisez la question 8 à tout $n \geq 3$, c'est-à-dire construisez des ensembles discriminants F_1 et F_0 les plus grands possibles pour near_n et donnez leurs cardinalités.*

Question 12. *Donnez un minorant, fonction de n , sur le nombre de scripts minimum de tout protocole de communication calculant near_n . Justifiez. En déduire la complexité de communication de near_n . [Aide : Vous pourrez utiliser le fait que $\text{CC}(f) \geq \log_2 \sigma(f)$, où $\sigma(f)$ est le nombre minimum de scripts pour tout protocole de communication calculant f .]*

On considère la fonction d'égalité $eq_n(x, y) \in \{0, 1\}$ qui vaut 1 si et seulement si les mots binaires de n bits x et y sont égaux. On pourra admettre que $CC(eq_n) = n + 1$.

Question 13. *Donnez les détails d'un protocole de communication sans mot vide de coût $n + 2$ calculant eq_n en 4 rondes de sorte qu'Alice transmet la moitié des bits de x à Bob et que Bob transmet la moitié des bits de y à Alice. Vous pourrez supposer n pair.*

On considère un processus de transmission particulier, noté $T_{1,2}$, qui consiste à envoyer des petits messages de longueur variable. Plus précisément, le participant (disons Alice) qui souhaite envoyer un mot binaire $S = s_0s_1s_2 \dots s_{t-1}$ de t bits à l'autre (Bob) le découpe en messages d'1 ou 2 bits. Lorsque c'est à son tour, et que les bits $s_0 \dots s_{i-1}$ ont déjà été transmis, Alice envoie dans son message le bit $m = s_{i+1}$ si $s_i = 0$, ou envoie les deux bits $m = s_{i+1}s_{i+2}$ si $s_i = 1$. Notez que dans tous les cas, s_i n'est pas directement transmis. Cependant Bob, qui reçoit un tel petit message m , peut en déduire les bits $s_i s_{i+1}$ ou $s_i s_{i+1} s_{i+2}$ en fonction de la taille $|m| \in \{1, 2\}$. Si $i \in \{t-2, t-1\}$, les bits s_{i+1} et s_{i+2} peuvent ne pas exister. Dans ce cas Alice ajoute 1 ou 2 bits arbitraires, ce qui ne pose pas de problème à Bob qui ne tiendra pas compte de ces bits s'il connaît t .

Question 14. *En vous inspirant du protocole de la question 13, combinée avec le processus de transmission $T_{1,2}$, donnez un protocole de communication sans mot vide calculant eq_n . Donnez son coût. [Aide : Supposez d'abord qu'Alice et Bob terminent en même temps la transmission de leur partie. Puis adaptez le protocole pour qu'il fonctionne dans tous les cas. Pensez qu'un des participants peut transmettre sa partie depuis le début et l'autre depuis la fin.]*

Question 15. *En remarquant que le protocole de communication pour eq_n issu de la question 14 a un coût $< n$, expliquez pourquoi il n'y a pas de contradiction avec le fait que $CC(eq_n) = n + 1$.*