

Vous avez droit à une feuille recto-verso de notes personnelles.

Ensemble dominant

On rappelle les deux algorithmes distribués vus en TP permettant de calculer un ensemble dominant S de taille proche (à un facteur constant) de l'optimal pour un graphe donné qui est soit un arbre ou une forêt (TREE), soit un graphe planaire-extérieur (OUTER).

- Algorithme TREE. Un sommet est sélectionné dans l'ensemble S si son degré est au moins deux.
- Algorithme OUTER. Chaque sommet détermine son degré qu'il envoie à ses voisins. Puis, un sommet est sélectionné dans l'ensemble S si son degré est au moins 4, ou bien si tous ses voisins sont de degré plus petit que 4.

Question 1. Décrivez l'algorithme OUTER dans le modèle LOCAL comme avec le langage et conventions du cours tout en précisant le nombre de rondes. [NB : On ne demande pas du code Java à la JBotSim! Vous pourrez utiliser NEWROUND, ID, SEND, SENDALL, RECEIVE, ...]

Question 2. Même question pour l'algorithme TREE en corrigeant le problème des composantes connexes ayant un ou deux sommets. Précisez le nombre de rondes.

Soit Q_n le graphe planaire-extérieur obtenu à partir d'un chemin P_n à n sommets et en ajoutant toutes les arêtes entre sommets à distance deux dans P_n , voir l'exemple ci-après.



Question 3. Montrez que pour tout n , P_n possède un ensemble dominant d'au plus $\lceil n/3 \rceil$ sommets.

Question 4. Montrez que pour tout n , Q_n possède un ensemble dominant d'au plus $\lceil n/5 \rceil$ sommets.

Complexité de communication

Question 5. Dans le modèle b -CONGEST, expliquez à quoi correspond le problème de la « détection d'un H » dans G , pour un graphe H fixé ? [NB : On ne demande pas sa solution.]

Question 6. Expliquez ce qu'est un protocole de communication qui calcule une fonction booléenne f ? Quelles en sont les principales règles ? Quel est l'objectif recherché ?

Question 7. À quel problème d'algorithmique distribué vu en cours la complexité de communication nous a-t-elle servi ? Citez le résultat.

On considère la fonction booléenne $\text{inf}_n(x, y) \in \{0, 1\}$ qui étant donnés deux mots binaires x, y , chacun de n bits, renvoie 1 si et seulement si « $x \leq y$ », c'est-à-dire si l'entier codé en binaire par le mot x est

inférieur ou égal à l'entier codé par le mot y . Par exemple, $\inf_2(01, 11) = 1$ car « $01 \leq 11$ ». En effet, $01_{\text{deux}} = 1_{\text{dix}} \leq 3_{\text{dix}} = 11_{\text{deux}}$.

Question 8. Donnez la matrice de la fonction $\inf_n$, pour $n = 2$.

On rappelle qu'un ensemble discriminant pour une fonction booléenne f et une valeur $v \in \{0, 1\}$ est un ensemble F_v d'entrées (x, y) pour f tel que, pour tout $(x, y) \neq (x', y') \in F_v$, $f(x, y) = f(x', y') = v$ et $\bar{v} \in \{f(x, y'), f(x', y)\}$, où $\bar{v} = 1 - v$ est la valeur complémentaire de v . Cela revient donc à dire qu'on ne peut pas avoir $f(x, y') = f(x', y) = v$.

Question 9. Donnez un ensemble discriminant F_1 pour $\inf_2$ le plus grand possible et donnez sa cardinalité. Même question pour un ensemble discriminant F_0 .

Question 10. Démontrez que tout ensemble discriminant F_v , pour une fonction f et valeur v données, ne peut avoir deux entrées situées sur une même ligne ou même colonne de la matrice de f .

Question 11. Généralisez la question 9 à tout n , c'est-à-dire construisez des ensembles discriminants F_1 et F_0 les plus grands possibles pour $\inf_n$. Vous devez justifier les constructions ainsi que leur optimalité. [Aide : La question 10 peut-être utilisée.]

Question 12. Donnez un minorant, fonction de n , sur le nombre de scripts minimum de tout protocole de communication calculant $\inf_n$. Justifiez. En déduire la complexité de communication de $\inf_n$.

Dans la suite on ne considèrera que des protocoles de communications sans-préfixe et sans mot vide. Soit f_0 la fonction booléenne définie sur les mots binaires de 2 bits et dont la matrice est la suivante :

x \ y				
	00	01	10	11
00	1	1	0	0
01	1	1	0	0
10	0	0	1	1
11	0	0	1	1

Question 13. Montrez que tout protocole de communication pour f_0 nécessite au moins 4 scripts.

Question 14. Donnez un protocole de communication pour f_0 de coût 2. [Son principe suffit.]

On dira qu'une fonction booléenne f sur des mots de n bits est k -similaire si la matrice de f comporte exactement k lignes différentes parmi les 2^n possibles. Par exemple, la fonction f_0 ci-dessus est 2-similaire.

Question 15. Proposer un algorithme non distribué qui, étant donnée la matrice de f , permet de calculer l'entier k tel que f est k -similaire. Donnez sa complexité en fonction de n . [Son principe suffit.]

Question 16. Proposez un protocole de communication pour une fonction f qui est k -similaire. Précisez, en fonction de k (éventuellement de n), le nombre de scripts de votre protocole, ainsi que son coût. [Aide : Retrouver les résultats des questions 13 et 14.]

Question 17. Pour tout entiers k et n , $1 < k \leq n$, trouver une fonction booléenne sur les mots de n bits qui soit k -similaire et de complexité de communication au moins $\log_2(k) + 1$. [La description de sa matrice suffit pour décrire la fonction, mais vous devez argumenter pour sa complexité de communication.]