Algorithmes Distribués (3)

- Rate 3 séances : TP
- Interro la semaine du 01/12
- Dernier TP → rendu : semaine 15/12
  → garvelle @ labri.fr

$CC(\text{obstruction}) = m+1$

$\text{obstruction}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ et } y \text{ sont disj.} \\ 0 & \text{sinon (pas de 1 en com.)} \end{cases}$

Réduction de la détection de C_3 et C_4 à partir de obstruction.

On considère un graphe H avec n sommets et m arêtes et sans C_3 ni C_4.

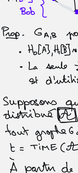
Ex :

$H =$

$\forall A,B \in E(H)$ on va construire $G_{A,B}$?

$A \subseteq \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ $\quad X = 0\,1\,\wedge\,0\,\wedge\,0$
$B \subseteq \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ $\quad Y = 0\,0\,1\,0\,1$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad m$ bits

$H \sqsubset K_2 \qquad K_2 =$



$G_{A,B}$ où H_0 ne garde que les arêtes de A et H_1 les arêtes de B

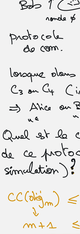
NB : $G_{A,B}$ a $2m$ sommets.

Prop. $G_{A,B}$ possède un $C_4 \Leftrightarrow A \cap B \neq \emptyset$

- $H_0[A], H_1[B]$ n'ont pas de C_3 ni C_4
- La seule façon d'avoir un C_4 des $G_{A,B}$ est d'utiliser la même arête de "K2"

Supposons qu'il existe un algorithme distribué $\mathcal{A}$ qui détecte C_3 ou C_4 dans tout graphe à $2m$ sommets en t rondes
$t = \text{TIME}(\mathcal{A}, G)$ dans le modèle CONGEST.

À partir de $\mathcal{A}$ appliqué à $G_{A,B}$ on peut en déduire un protocole de communication (sans-préfixe) calculant $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow \text{disj}(X,Y)$
$X, Y \in \{0,1\}^m$



lorsque dans $\mathcal{A}$ un sommet u détecte C_3 ou C_4 (i.e. DETECT(u) := TRUE)
$\Rightarrow$ Alice ou Bob envoie "0" comme msg final.

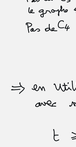
Quel est le coût de la communication C de ce protocole (issu de $\mathcal{A}$ par simulation) ?

$CC(\text{obstruction}_m) \leq C \leq 2bmt + 1$
$m+1 \leq 2bmt + 1$

$$\boxed{\frac{m}{2bm} \leq t = \text{TIME}(\mathcal{A}, G_{A,B})}$$

Magic : $\left[\forall m,\ \exists H \text{ avec } n \text{ sommets, sans } C_3 \text{ ni } C_4, \text{ et avec } m = \frac{1}{2} n^{3/2}.\right.$

$\left[\text{On a déjà vu que } \forall H \text{ à } n \text{ sommets, sans } C_3 \text{ ni } C_4 \text{ possède} \leq n^{3/2} \text{ arêtes}\right]$



Pas de C_3 car le graphe est bipati !
Pas de C_4 : une droite ↔ un point d'intersection

$\Rightarrow$ en utilisant ce graphe H avec $m = \frac{1}{2} n^{3/2}$.

$$t \geq \frac{m}{2bm} = \frac{n^{3/2}}{4b} = \frac{\sqrt{m}}{4b} = \Omega\left(\frac{\sqrt{n}}{b}\right)$$

On a démontré que tout algorithme $\mathcal{A}$ qui détecte un C_3 ou C_4 a une complexité en temps de $\text{TIME} = \Omega(\sqrt{n}/b)$ dans le modèle b-CONGEST.

On a vu un algorithme de détection qui atteint $\text{TIME} = O(\sqrt{n})$ avec $b = O(\log n)$.

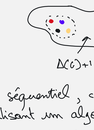
FIN DU CHAPITRE 4

Nouveau chapitre 7. COLORATION

On considère le modèle LOCAL.
On souhaite partitionner les sommets en "couleurs" qui sont des ensembles indépendants.

une k-coloration de G

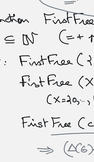
$c : V(G) \longrightarrow \{0, 1, \dots, k-1\}$
tq $u \sim v \in E(G) \quad c(u) \neq c(v)$.



Objectif : calculer très "rapidement" une coloration avec "pas trop" de couleurs.

"pas trop" = on veut $\Delta(G)+1$ couleurs.
(degré max. de G)

Il est toujours possible de faire $\Delta(G)+1$ couleurs.



En séquentiel, c'est très facile en utilisant un algorithme glouton.

GREEDYCOLORING(G)

1. Pour tout sommet u pour $c(u) := \text{ID}(u)$ (au début c'est une coloration)
2. Successivement pour chaque sommet u poser $c(u) := \text{FirstFree}(c(N(u)))$ (reste une coloration)

$\Rightarrow c(u) \leq \Delta(G)$
$c(u) \neq v_1 \dots v_{\Delta(G)}$ avec $v_1, \dots, v_{\Delta(G)}$ voisins de u
exo : couleurs des voisins de u

Fonction $\text{FirstFree}(X) := \min(\mathbb{N} \setminus X)$
$X \subseteq \mathbb{N}$ (= + petit entier ≥ 0 pas dans X)

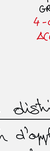
Ex : $\text{FirstFree}(\{0,1,2,4,1,8\}) = 3$

$\text{FirstFree}(X) \in \{0, 1, \dots, |X|\} \leq |X|$
$(X = \{v_0, \dots, |X|-1\})$ $\quad |X|+1$

$\text{FirstFree}(c(N(u))) \leq \deg(u) \leq \Delta(G)$.

$\Rightarrow (\Delta(G)+1)$ - coloration.

Comment le faire avec un algo. distr. ?



↳ PB : des sommets voisins ont fait la même décision
$\Rightarrow$ pas une coloration.

Solution distribuée : → FirstFree

Être sûr d'appliquer la règle seulement à des sommets non voisins !