

Notes de cours prises pendant les Cours/TD/TP autorisées.

Coloration

Pour un sommet u d'un graphe G à n sommets, on notera $ID(u)$ l'identifiant du sommet u , un entier unique de $\{0, \dots, n - 1\}$. Comme vu en cours, on suppose que les algorithmes distribués à développer peuvent utiliser les instructions de communication suivantes (supposées être exécutées par un sommet u arbitraire de G) :

- $SEND(v, M)$: qui permet d'envoyer au voisin v de u le message M .
- $RECEIVE(v)$: qui donne le message envoyé depuis le voisin v de u .
- $SENDALL(M)$: qui permet d'envoyer à tous les voisins de u le message M .
- $RECEIVEALL$: qui donne l'ensemble des couples (v, M_v) , M_v étant le message envoyé par v .

Vous pourrez également utiliser l'instructions $NEWPULSE$ permettant d'indiquer dans l'algorithme le démarrage d'une nouvelle ronde. Notez que contrairement aux instructions $SEND/RECEIVE$ de base, les extensions n'ont pas besoin de connaître explicitement le voisinage du sommet u . Au démarrage de l'algorithme, chaque sommet u supposera connu n , $ID(u)$ et $N(u)$.

Dans tout l'exercice, on considèrera des algorithmes distribués s'exécutant dans le modèle LOCAL. Pour un sous-ensemble $W \subseteq V(G)$ de sommets de G , on notera $ID(W) = \{ID(u) : u \in W\}$ l'ensemble des identifiants des sommets de W . Pour tout sous-ensemble $X \subset \mathbb{N}$, on notera $FIRSTFREE(X) = \min(\mathbb{N} \setminus X)$, c'est-à-dire le plus petit entier naturel qui n'est pas dans X . Par exemple, $FIRSTFREE(\{0, 1, 2, 4, 8\}) = 3$ et $FIRSTFREE(\{0\}) = 1$.

Question 1. Montrez que $FIRSTFREE(X) \leq |X|$ où $|X|$ représente le nombre d'éléments de X .

SOLUTION. [3 pts | \sum 3.0] Si $FIRSTFREE(X) = k$, alors X contient au moins tous les entiers de $[0, k[$, soit au moins k entiers. Donc $|X| \geq k = FIRSTFREE(X)$.

On considère l'algorithme A consistant, pour chaque sommet u d'un graphe G , à calculer en parallèle $FIRSTFREE(ID(N(u)))$, et on notera $c(u)$ cet entier. Rappelons que $N(u)$ représente l'ensemble des voisins de u dans G .

Question 2. Écrivez l'algorithme A et donner le nombre de rondes.

SOLUTION. [3 pts | \sum 6.0] Code exécuté par un sommet u quelconque :

- $SENDALL(ID(u))$
- $R_u := \bigcup_{v \in N(u)} RECEIVE(v)$ NB : $R_u = \{ID(v) : v \in N(u)\}$
- $c(u) := FIRSTFREE(R_u)$

ce qui prend une seule ronde.

Question 3. Donnez un graphe connexe G à n sommets, et les identifiants pour ses sommets, où l'application de A ne produit que deux valeurs différentes pour la variable c . Quelles sont ces valeurs ?

SOLUTION. [2 pts | \sum 8.0] On peut considérer le graphe K_n avec les sommets numérotés de 0 à $n - 1$ où toutes les arêtes incidentes à 0 ont été supprimées sauf l'arête $0 - 1$. Tous les sommets vont se colorier en 0 (car ils sont pas adjacent à 0) sauf le sommet 1 qui lui va se colorier 1. Un cycle ou un chemin à n sommets, ou encore une étoile à $n - 1$ feuilles dont le centre est numéroté 0 ou 1, produisent le même résultat.

NB : Un exemple de graphe G de taille fixée, comme un cycle à quatre sommets, ou une clique à deux sommets, ne consistue pas un exemple de graphe G à n sommets.

Question 4. *Donnez un graphe connexe G à n sommets, et les identifiants pour ses sommets, où l'application de A produit $c(u) = \text{ID}(u)$ pour chaque sommet u .*

SOLUTION. [2 pts | \sum 10.0] On peut considérer le graphe K_n avec les sommets numérotés de 0 à $n - 1$. Le sommet u va se colorier $c(u) = u$ puisque $N(u) = \{0, \dots, n - 1\} \setminus \{u\}$.

On considère l'algorithme B consistant à faire, pour chaque sommet u d'un graphe G :

1. $c(u) := \text{ID}(u)$
2. pour $k := n - 1, n - 2, \dots, 4, 3$ faire :
 - (a) NEWPULSE
 - (b) si $c = k$, alors $c(u) := \text{FIRSTFREE}(\text{ID}(N(u)))$

Question 5. *Quel est le nombre de rondes de l'algorithme B?*

SOLUTION. [2 pts | \sum 12.0] L'algorithme produit une ronde par boucle. Et, une boucle du type "pour $k \in [a, b]$ faire : ..." produira $b - a + 1$ rondes (pour un intervalle $[a, b]$ d'entiers). Pour être précis, c'est $\max\{b - a + 1, 0\}$ car le nombre rondes (ou de répétitions de la boucle) est toujours un entier non nuls. Cela fait donc $((n - 1) - 3) + 1 = n - 3$ avec $a = 3$ et $b = n - 1$, soit $\max\{n - 3, 0\}$ rondes.

Question 6. *Exprimez en fonction du degré maximum Δ de G le nombre maximum de valeur différentes pour $c(u)$ pour l'ensemble des $u \in V(G)$?*

SOLUTION. [3 pts | \sum 15.0] En utilisant la propriété $\text{FIRSTFREE}(X) \leq |X|$, il est alors clair que $c(u) \leq |N(u)| = \text{deg}(u)$, et donc $c(u) \in [0, \text{deg}(u)]$. Cela fait donc $\text{deg}(u) + 1 \leq \Delta + 1$ valeurs possibles pour $c(u)$.