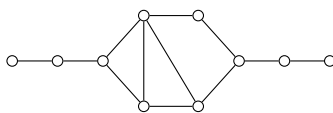

Une feuille A4 recto-verso de notes personnelles autorisées.

Détection de griffes

Question 1. *Quelle est la différence entre le modèle LOCAL et CONGEST ?*

On rappelle qu'un *sous-graphe* d'un graphe G est simplement un graphe qu'on peut obtenir en supprimant des sommets et des arêtes de G . Le sous-graphe est *induit* s'il peut être obtenu en supprimant uniquement des sommets (et toutes leurs arêtes incidentes).

Par exemple, le graphe ci-dessous possède un cycle de longueur 6 comme sous-graphe, mais pas comme sous-graphe induit. Par contre, il possède un chemin de longueur 7 comme sous-graphe induit.



Question 2. *Expliquez en quoi consiste précisément le problème de détecter, par un algorithme distribué, un cycle de longueur 4 dans un graphe ? Est-ce au sens de sous-graphe ou de sous-graphe induit ?*

Une *griffe* est un graphe particulier ayant quatre sommets et trois arêtes, toutes incidentes à un même sommet. Tout graphe qui possède un sommet de degré ≥ 3 possède nécessairement au moins une griffe comme sous-graphe, mais pas forcément comme sous-graphe induit.

Question 3. *Donnez le plus petit exemple de graphe possédant une griffe comme sous-graphe, mais aucune comme sous-graphe induit.*

On supposera le modèle LOCAL où chaque sommet u d'un graphe G ne peut utiliser que les deux primitives de communication suivantes :

- $\text{SENDALL}(m)$: envoie le message m à tous les voisins de u .
- $\text{RECEIVEALL}()$: renvoie la liste des messages reçus par u et émis à la ronde courante.

Notez bien qu'un sommet u n'a pas accès directement à la liste de ses voisins dans G . Mais il peut calculer cette liste grâce à son identifiant $\text{ID}(u)$ et aux deux primitives ci-dessus. Vous pourrez utiliser NEWROUND pour d'indiquer le démarrage d'une nouvelle ronde.

Question 4. *Donnez un algorithme distribué dans le modèle LOCAL et le style du cours permettant de détecter si un graphe G possède une griffe comme sous-graphe. Indiquez clairement le nombre de rondes. Vous supposerez que chaque sommet u possède une variable locale $\text{GRIFFE} \in \{\text{VRAI}, \text{FAUX}\}$ indiquant si u a détecté une griffe dans G .*

Question 5. *Indiquez sur le graphe dessiné ci-dessus tous les sommets et arêtes appartenant à une griffe induite. Vous pourrez redessinez le graphe en distinguant toutes les griffes induites qu'il possède. Combien y'en a-t'il ? Distinguez les clairement sur votre dessin. Numérotez les sommets si c'est plus simple.*

Question 6. *Même question que la question 4, sauf que votre algorithme doit permettre de détecter une griffe comme sous-graphe induit. Vous pourrez supposer connue la fonction $\text{INDEP3}(L) \in \{\text{VRAI}, \text{FAUX}\}$ qui, étant donnée un ensemble d'arêtes $L = \{\{u_1, v_1\}, \dots, \{u_\ell, v_\ell\}\}$, renvoie VRAI si et seulement si il existe trois sommets w_i, w_j, w_k qui apparaissent dans L mais où aucune de leurs paires ne forment une arête de L , c'est-à-dire tels que $\{w_i, w_j\} \notin L$, $\{w_j, w_k\} \notin L$ et $\{w_k, w_i\} \notin L$.*

Complexité de communication

Question 7. Expliquez ce qu'est un protocole de communication qui calcule une fonction booléenne f ? Quelles en sont les principales règles? Quel est l'objectif recherché?

Question 8. Expliquez le principe du protocole « trivial » pour le calcul de f . Quel est son coût?

Question 9. Rappelez la définition de $CC(f)$, la complexité de communication d'une fonction booléenne f .

Question 10. Soient M et M' les matrices de deux fonctions booléennes f et f' telles que M' peut être obtenue à partir de M en permutant ses lignes, c'est-à-dire qu'il existe une permutation σ telle que $M'_{i,j} = M_{\sigma(i),j}$ pour toutes paires d'indices (i, j) . Montrez alors que $CC(f') = CC(f)$.

On considère la fonction $\text{diff}_n(x, y) \in \{0, 1\}$ qui étant donnés deux mots binaires x, y , chacun de n bits, renvoie 1 si et seulement si « $|x - y| > 1$ », c'est-à-dire si les entiers représentés en binaires par les mots x et y diffèrent d'au moins deux unités. Par exemple, $\text{diff}_2(11, 01) = 1$ car $|3 - 1| > 1$. En revanche, $\text{diff}_2(01, 10) = 0$ car $|1 - 2| \not> 1$. Bien évidemment, $\text{diff}_n(x, x) = 0$ pour tout $x \in \{0, 1\}^n$.

Question 11. Donnez la matrice de la fonction diff_n pour $n = 2$.

On rappelle qu'un ensemble discriminant pour une fonction booléenne f et une valeur $v \in \{0, 1\}$ est un ensemble F_v d'entrées (x, y) pour f tel que, pour tout $(x, y) \neq (x', y') \in F_v$, $f(x, y) = f(x', y') = v$ et $\bar{v} \in \{f(x, y'), f(x', y)\}$, où $\bar{v} = 1 - v$ est la valeur complémentaire de v .

Question 12. Donnez un ensemble discriminant F_0 pour diff_2 le plus grand possible et donnez sa cardinalité. Même question pour un ensemble discriminant F_1 .

Question 13. Expliquez la structure de la matrice de la matrice diff_n lorsque $n \geq 3$.

Question 14. À l'aide d'ensembles discriminants pour diff_n lorsque $n \geq 3$, donnez un minorant, fonction de n , sur le nombre de scripts de tout protocole de communication calculant diff_n . Justifiez. En déduire la valeur exacte de $CC(\text{diff}_n)$. Pensez à vous servir de la question 8.