

Une feuille A4 recto-verso de notes personnelles autorisées.

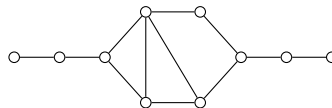
Détection de griffes

Question 1. *Quelle est la différence entre le modèle LOCAL et CONGEST ?*

SOLUTION. [3 pts | Σ 3.0] Les messages sont de taille illimitée pour le modèle LOCAL alors qu'ils sont limités à $O(\log n)$ bits pour le modèle CONGEST.

On rappelle qu'un *sous-graphe* d'un graphe G est simplement un graphe qu'on peut obtenir en supprimant des sommets et des arêtes de G . Le sous-graphe est *induit* s'il peut être obtenu en supprimant uniquement des sommets (et toutes leurs arêtes incidentes).

Par exemple, le graphe ci-dessous possède un cycle de longueur 6 comme sous-graphe, mais pas comme sous-graphe induit. Par contre, il possède un chemin de longueur 7 comme sous-graphe induit.



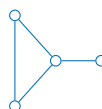
Question 2. *Expliquez en quoi consiste précisément le problème de détecter, par un algorithme distribué, un cycle de longueur 4 dans un graphe ? Est-ce au sens de sous-graphe ou de sous-graphe induit ?*

SOLUTION. [3 pts | Σ 6.0] Chaque sommet u possède une variable locale $DETECT \in \{VRAI, FAUX\}$ qui sera la sortie du problème, et qui indiquera si u a “détecté” le cycle (de longueur 4) ou pas. Plus précisément, G possède un cycle de longueur 4 si et seulement si il existe un sommet u avec $DETECT = VRAI$ à la fin du calcul. Ici dire que “ G possède un cycle” veut dire G contient un cycle comme sous-graphe.

Une *griffe* est un graphe particulier ayant quatre sommets et trois arêtes, toutes incidentes à un même sommet. Tout graphe qui possède un sommet de degré ≥ 3 possède nécessairement au moins une griffe comme sous-graphe, mais pas forcément comme sous-graphe induit.

Question 3. *Donnez le plus petit exemple de graphe possédant une griffe comme sous-graphe, mais aucune comme sous-graphe induit.*

SOLUTION. [3 pts | Σ 9.0] Une griffe plus une arête entre deux sommets non-adjacents.



C'est d'ailleurs une solution générale : le plus petit graphe G contenant H comme sous-graphe mais pas comme sous-graphe induit est le graphe H lui-même plus une arête entre deux sommets non-adjacents, pour peu que H ne soit pas le graphe complet. Dans ce dernier cas, il faut ajouter un sommet plutôt qu'une arête.

On supposera le modèle LOCAL où chaque sommet u d'un graphe G ne peut utiliser que les deux primitives de communication suivantes :

- $SENDALL(m)$: envoie le message m à tous les voisins de u .
- $RECEIVEALL()$: renvoie la liste des messages reçus par u et émis à la ronde courante.

Notez bien qu'un sommet u n'a pas accès directement à la liste de ses voisins dans G . Mais il peut calculer cette liste grâce à son identifiant $ID(u)$ et aux deux primitives ci-dessus. Vous pourrez utiliser `NEWROUND` pour d'indiquer le démarrage d'une nouvelle ronde.

Question 4. *Donnez un algorithme distribué dans le modèle LOCAL et le style du cours permettant de détecter si un graphe G possède une griffe comme sous-graphe. Indiquez clairement le nombre de rondes. Vous supposerez que chaque sommet u possède une variable locale $GRIFFE \in \{VRAI, FAUX\}$ indiquant si u a détecté une griffe dans G .*

SOLUTION. [3 pts | $\Sigma 12.0$]

Principe : $GRIFFE(u) = VRAI$ ssi $deg(u) \geq 3$. Il suffit donc de calculer le degré en envoyant chacun son identifiant à ses voisins. Plus précisément :

GRIFFE_DÉTECTION

(code du sommet u)

- `SENDALL(ID(u))`
- `N := RECEIVEALL()` // $N =$ ensemble des voisins de u
- `GRIFFE := (|N| \geq 3)` // Griffe ?

Il y a 1 ronde.

Question 5. *Indiquez sur le graphe dessiné ci-dessus tous les sommets et arêtes appartenant à une griffe induite. Vous pourrez redessinez le graphe en distinguant toutes les griffes induites qu'il possède. Combien y'en a-t'il ? Distinguez les clairement sur votre dessin. Numérotez les sommets si c'est plus simple.*

SOLUTION. [3 pts | $\Sigma 15.0$] Il y a 5 sommets de degré ≥ 3 qui peuvent être le centre de la griffe. Pour le sommet de degré 4, il n'y a qu'une seule griffe induite alors qu'il pourrait en avoir deux. On vérifie qu'il n'y a, au final, que deux griffes induites.



Question 6. *Même question que la question 4, sauf que votre algorithme doit permettre de détecter une griffe comme sous-graphe induit. Vous pourrez supposer connue la fonction $INDEP3(L) \in \{VRAI, FAUX\}$ qui, étant donnée un ensemble d'arêtes $L = \{\{u_1, v_1\}, \dots, \{u_\ell, v_\ell\}\}$, renvoie `VRAI` si et seulement si il existe trois sommets w_i, w_j, w_k qui apparaissent dans L mais où aucune de leurs paires ne forment une arête de L , c'est-à-dire tels que $\{w_i, w_j\} \notin L$, $\{w_j, w_k\} \notin L$ et $\{w_k, w_i\} \notin L$.*

SOLUTION. [3 pts | $\Sigma 18.0$] Pour avoir une griffe induite, il faut et il suffit qu'un sommet possède trois voisins tels que dans leurs voisinages les trois sommets soient indépendants, c'est-à-dire ne soient pas voisins entre-eux.

Principe : Collecter les voisins de ces voisins, puis tester à l'aide de `INDEP3`, si trois de ses voisins ne sont pas voisins entre-eux.

Pour faire simple, on va confondre u et $ID(u)$.

GRIFFE_INDUITE_DÉTECTION

(code du sommet u)

- `SENDALL(u)`
 - `N := RECEIVEALL(u)` // $N =$ voisinage de u
- `NEWROUND` // nouvelle ronde
- `SENDALL(N)` // envoi des voisinages
 - `(Mv1, Mv2, ..., Mv|N|) := RECEIVEALL()` // réception des $|N|$ voisinages de u

- $L := \left\{ \{v_i, v_j\} \in N^2 : v_i \in M_{v_j} \vee v_j \in M_{v_i} \right\}$ // calcul des arêtes entres voisins de u
- $\text{GRIFFE} := \text{INDEP3}(L)$ // griffe induite?

Il y a 2 rondes.

Complexité de communication

Question 7. Expliquez ce qu'est un protocole de communication qui calcule une fonction booléenne f ? Quelles en sont les principales règles? Quel est l'objectif recherché?

SOLUTION. [3 pts | Σ 21.0] C'est un algorithme qui permet à deux participants, Alice et Bob, d'échanger des messages jusqu'à obtenir la valeur $f(x, y)$ où x, y sont respectivement les entrées d'Alice et Bob. Ils s'échangent des messages chacun à leur tour, Alice commençant, et le dernier bit doit être la réponse. Bien sûr, chacun ne connaît que son entrée et le protocole. L'objectif est de minimiser le nombre total de bits échangés.

Question 8. Expliquez le principe du protocole « trivial » pour le calcul de f . Quel est son coût?

SOLUTION. [3 pts | Σ 24.0] Il s'agit d'un protocole de communication particulier où Alice transmet un seul message, son entrée x , et où Bob renvoie la réponse $f(x, y)$ attendue. Son coût est de $n + 1$ où n est la taille des entrées.

Question 9. Rappelez la définition de $\text{CC}(f)$, la complexité de communication d'une fonction booléenne f .

SOLUTION. [3 pts | Σ 27.0] C'est le coût minimum d'un protocole de communication **sans-préfixe** calculant f .

Question 10. Soient M et M' les matrices de deux fonctions booléennes f et f' telles que M' peut être obtenue à partir de M en permutant ses lignes, c'est-à-dire qu'il existe une permutation σ telle que $M'_{i,j} = M_{\sigma(i),j}$ pour toutes paires d'indices (i, j) . Montrez alors que $\text{CC}(f') = \text{CC}(f)$.

SOLUTION. [3 pts | Σ 30.0] Par contradiction, supposons qu'il n'y ait pas égalité, et sans perte de généralité, supposons que $\text{CC}(f) < \text{CC}(f')$.

Soit Π_f un protocole de communication optimal pour f , c'est-à-dire un protocole de communication sans-préfixe dont le coût est précisément $\text{CC}(f)$. On va calculer f' en utilisant Π_f comme suit.

1 Alice, qui connaît Π_f , calcule la matrice M . Pour cela elle simule, sans aucune communication, l'exécution de Π_f pour toutes les entrées possibles $(x, y) \in \{0, 1\}^{n \times n}$, en simulant les réponses de Bob, et stocke le résultat dans M , en posant $M_{x,y} = f(x, y)$.

2 Soient (x', y') les entrées d'Alice et Bob qui souhaitent calculer $f'(x', y')$. La valeur de x' correspond à un numéro de ligne de M' . Alice, qui connaît f' et donc M' , cherche dans la matrice M qu'elle vient de calculer un numéro de ligne x correspondant à la ligne x' de M' . Un y en a au moins une puisque les lignes de M' sont celles de M mais permutées. En particulier, $f'(x', y') = M'_{x',y'} = M_{x,y'} = f(x, y')$ par définition de M et M' .

3 À partir de là, Alice exécute Π_f avec x comme entrée, et Bob exécute simplement Π_f sur son entrée y' . Le résultat sera $f(x, y')$, puisqu'Alice et Bob, grâce à Π_f , ont simplement calculé f sur (x, y') . Or, on a vu que $f(x, y') = f'(x', y')$, soit le calcul souhaité.

Le nombre de bits échangés pour le calcul de $f'(x', y')$ ne dépasse pas le coût de Π_f . Il suit que $\text{CC}(f') \leq \text{CC}(f)$: contradiction. C'est donc que $\text{CC}(f') = \text{CC}(f)$.

On considère la fonction $\text{diff}_n(x, y) \in \{0, 1\}$ qui étant donnés deux mots binaires x, y , chacun de n bits, renvoie 1 si et seulement si « $|x - y| > 1$ », c'est-à-dire si les entiers représentés en binaires par les mots x et y diffèrent d'au moins deux unités. Par exemple, $\text{diff}_2(11, 01) = 1$ car $|3 - 1| > 1$. En revanche, $\text{diff}_2(01, 10) = 0$ car $|1 - 2| \not> 1$. Bien évidemment, $\text{diff}_n(x, x) = 0$ pour tout $x \in \{0, 1\}^n$.

Question 11. *Donnez la matrice de la fonction diff_n pour $n = 2$.*

SOLUTION. [3 pts | Σ 33.0]

	y	00	01	10	11
x	00	0	0	1	1
01	0	0	0	1	
10	1	0	0	0	
11	1	1	0	0	

On rappelle qu'un ensemble discriminant pour une fonction booléenne f et une valeur $v \in \{0, 1\}$ est un ensemble F_v d'entrées (x, y) pour f tel que, pour tout $(x, y) \neq (x', y') \in F_v$, $f(x, y) = f(x', y') = v$ et $\bar{v} \in \{f(x, y'), f(x', y)\}$, où $\bar{v} = 1 - v$ est la valeur complémentaire de v .

Question 12. *Donnez un ensemble discriminant F_0 pour diff_2 le plus grand possible et donnez sa cardinalité. Même question pour un ensemble discriminant F_1 .*

SOLUTION. [3 pts | Σ 36.0]

	y	00	01	10	11
x	00	0	0	1	1
01	0	0	0	0	1
10	1	0	0	0	0
11	1	1	0	0	0

Pour $v = 0$, on peut poser $F_0 = \{(00, 01), (01, 10), (10, 11)\}$. La diagonale inférieure était aussi possible, de même qu'on pouvait remplacer dans F_0 la première entrée par $(00, 00)$ ou la dernière par $(11, 11)$. On remarque que cette diagonale de 0 n'a que un au-dessus. C'est donc bien un ensemble discriminant avec $|F_0| = 3$. On remarque que tout ensemble F_0 à plus de trois entrées aurait du contenir deux zéros du carré 2×2 central de la matrice, ou deux valeurs verticales ou horizontales, rendant non-discriminant l'ensemble.

Pour $v = 1$, on peut poser $F_0 = \{(00, 10), (01, 11), (10, 00), (11, 01)\}$. Pour les deux premières entrées $(00, 10)$, $(01, 11)$ (ou, par symétrie, les deux dernières), on observe qu'on a une valeur 0 mal placée. Pour les entrées $(00, 10)$, $(10, 00)$ (ou leurs symétriques) on a une valeur 0 placée en bas à droite (ou en haut à gauche). C'est donc bien un ensemble discriminant avec $|F_0| = 4$. On ne pouvait pas faire plus grand, puisqu'au delà de 2^n deux valeurs verticales ou horizontales apparaissent, rendant non-discriminant l'ensemble.

Question 13. *Expliquez la structure de la matrice de la matrice diff_n lorsque $n \geq 3$.*

SOLUTION. [3 pts | Σ 39.0] De manière générale, la matrice de diff_n possède trois diagonales descendantes de 0 : la diagonales principales (cas $y = x$), puis une juste au-dessus (cas $y = x + 1$) en l'autre juste en dessous (cas $y = x - 1$). En particulier, chaque ligne et chaque colonne possède trois 0 consécutifs, sauf les premières ou les dernières où il y en a que deux.

Question 14. *À l'aide d'ensembles discriminants pour diff_n lorsque $n \geq 3$, donnez un minorant, fonction de n , sur le nombre de scripts de tout protocole de communication calculant diff_n . Justifiez. En déduire la valeur exacte de $\text{CC}(\text{diff}_n)$. Pensez à vous servir de la question 8.*

SOLUTION. [3 pts | Σ 42.0] On peut généraliser la question 12 à tout $n \geq 3$, et construire les ensembles discriminants F_0 et F_1 suivants :

Pour $v = 0$, on peut poser $F_0 = \{(x, x + 1) : x \in \{0, \dots, 2^n - 2\}\}$. Le triangle supérieur est rempli de 1 car il correspond à des entrées (x, y) avec $y > x + 1$. F_0 est donc discriminant pour la valeur $v = 0$. On a $|F_0| = 2^n - 1$.

Pour $v = 1$, on pouvait garder le même ensemble F_1 que pour la question 12. Mais, pour $n \geq 3$, on pouvait aussi choisir $F_1 = \{(x, x + 2) : x \in \{0, 1, 2, 3\}\}$ avec $|F_1| = 4$. Il s'agit d'une diagonale contenant quatre 1 avec un triangle inférieur de 0. Attention au fait que chaque colonne ou ligne de la matrice contient au plus

trois valeurs à 0, et donc la matrice ne contient aucun triangle de 0 de taille > 3 ce qui limite la taille des ensembles discriminants.

D'après une proposition du cours, le nombre de scripts doit vérifier $\sigma(\text{diff}_n) \geq |F_0| + |F_1| = 2^n - 1 + 4 > 2^n$. Donc $\text{CC}(\text{diff}_n) \geq \log_2 \sigma(\text{diff}_n) > n$. Donc $\text{CC}(\text{diff}_n) \geq n + 1$, puisque $\text{CC}()$ est un entier. À cause du majorant dû au protocole trivial (question 8), on doit avoir l'égalité, soit $\text{CC}(\text{diff}_n) = n + 1$.