

Une page A4 recto-verso de notes personnelles autorisées.

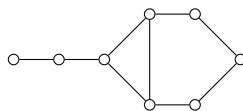
## Mode synchrone

**Question 1.** *Donnez les principales caractéristiques du modèle LOCAL, et expliquez les différences avec le modèle CONGEST et la variante b-CONGEST.*

On considère un algorithme distribué fonctionnant en mode synchrone, appelé DEG3, dont l'objectif est de sélectionner certains sommets d'un graphe  $G$ , et on appellera  $S$  l'ensemble de tous les sommets ainsi sélectionnés. Son principe est le suivant :

**DEG3** « Chaque sommet détermine son degré qu'il envoie à ses voisins. Puis, un sommet est sélectionné dans l'ensemble  $S$  si son degré est au moins 3, ou bien si tous ses voisins sont de degré plus petit que 3. »

**Question 2.** *Quel est le résultat de l'application de l'algorithme DEG3 si  $G$  est le graphe ci-après ? Indiquez sur un dessin les sommets sélectionnés dans l'ensemble  $S$  en les distinguant des autres.*



On supposera le modèle LOCAL où chaque sommet  $u$  d'un graphe  $G$  ne peut utiliser que les deux primitives de communication suivantes :

- **SENDALL( $m$ )** : envoie le message  $m$  à tous les voisins de  $u$ .
- **RECEIVEALL()** : renvoie la liste des messages reçus par  $u$  et émis à la ronde courante.

Notez bien qu'un sommet  $u$  n'a pas accès directement à la liste de ses voisins dans  $G$ . Mais il peut calculer cette liste grâce à son identifiant  $ID(u)$  et aux deux primitives ci-dessus. Vous pourrez utiliser NEWROUND pour d'indiquer le démarrage d'une nouvelle ronde.

**Question 3.** *Décrivez l'algorithme DEG3 dans le modèle LOCAL et le style du cours en précisant clairement les rondes. Vous supposerez que chaque sommet  $u$  possède une variable locale  $SELECT \in \{TRUE, FALSE\}$  indiquant si  $u \in S$  ou pas.*

On rappelle qu'un *arbre* est un graphe ayant la propriété d'être connexe et sans cycle.

**Question 4.** *Pour tout  $n \geq 1$ , décrivez un arbre à  $n$  sommets où lorsque DEG3 est appliqué, tous les sommets sont sélectionnés.*

**Question 5.** *Pour tout  $n \geq 4$ , décrivez un arbre à  $n$  sommets où lorsque DEG3 est appliqué, aucun sauf un est sélectionné.*

On dira que  $S$  est un ensemble *dominant* de  $G$ , si chaque sommet  $u$  de  $G$  est soit dans  $S$  soit voisin d'un sommet de  $S$ .

**Question 6.** *Est-il vrai que si  $G$  est un arbre, alors l'ensemble  $S$  résultant de l'application de DEG3 sur  $G$  est dominant ? Justifiez (par un contre-exemple ou une preuve).*

# Complexité de communication

**Question 7.** Expliquez ce qu'est un protocole de communication qui calcule une fonction booléenne  $f$  ? Quelles en sont les principales règles ? Quel est l'objectif recherché ?

On considère la fonction booléenne  $\text{odd}_n(x, y) \in \{0, 1\}$  qui étant donnés deux mots binaires  $x, y$ , chacun de  $n$  bits, renvoie 1 si et seulement si le mot  $x \wedge y$  (ET-bit-à-bit) contient un nombre impair de 1. Par exemple,  $\text{odd}_8(11011101, 01101110) = 1$  car  $11011101 \wedge 01101110 = 01001100$  qui contient un nombre impair de 1. On a aussi  $\text{odd}_8(11011110, 01101001) = 0$ . Notez que  $\text{odd}_n(2^i, 2^j) = 1$  si et seulement si  $i = j$ . On notera  $M(n)$  la matrice de la fonction  $\text{odd}_n$ .

**Question 8.** Donnez les matrices  $M(1)$  et  $M(2)$ .

**Question 9.** Démontrez que, pour tout  $n \geq 1$ ,  $M(n+1) = \begin{bmatrix} M(n) & M(n) \\ M(n) & \overline{M(n)} \end{bmatrix}$  où  $\overline{M(n)}$  représente la matrice  $M(n)$  où tous les bits ont été complétés. En déduire que  $M(n+1)$  possède une diagonale de zéros.

On rappelle qu'un ensemble discriminant pour une fonction booléenne  $f$  et une valeur  $v \in \{0, 1\}$  est un ensemble  $F_v$  d'entrées  $(x, y)$  pour  $f$  tel que, pour tout  $(x, y) \neq (x', y') \in F_v$ ,  $f(x, y) = f(x', y') = v$  et  $\bar{v} \in \{f(x, y'), f(x', y)\}$ , où  $\bar{v} = 1 - v$  est la valeur complémentaire de  $v$ . Cela revient donc à dire qu'on ne peut pas avoir  $f(x, y) = f(x', y) = v$ . On notera  $\text{CC}(f)$  la complexité de communication de  $f$ .

**Question 10.** Démontrez que si  $f$  possède un ensemble discriminant  $F_v$  tel que  $|F_v| = 2^k$ , pour un certain entier  $k \geq 1$  et une valeur  $v \in \{0, 1\}$ , alors  $\text{CC}(f) \geq k + 1$ . [Aide : Utilisez les liens établis dans le cours entre  $\text{CC}(f)$ , le nombre de scripts et la cardinalité des ensembles discriminants pour  $f$ .]

**Question 11.** Soient  $F_v$  et  $F'_v$  deux ensembles discriminants pour une fonction  $f$  et la valeur  $v$ . Est-il vrai que  $F_v \cup F'_v$  est aussi un ensemble discriminant pour  $f$  et la valeur  $v$  ? Justifiez.

**Question 12.** Donnez un ensemble discriminant  $F_0$  pour  $\text{odd}_2$  le plus grand possible, sans démontrer l'optimalité.

**Question 13.** De manière générale, démontrez que pour tout  $n \geq 1$ ,  $\text{odd}_n$  possède un ensemble discriminant de cardinalité au moins  $n$ . Justifiez le caractère discriminant de cet ensemble. [Aide : Pensez aux entrées puissances de deux.]

**Question 14.** Démontrez que  $\text{CC}(\text{odd}_{2^k}) \geq k + 1$  pour tout entier  $k \geq 1$ .

Dans la suite on ne considèrera que des protocoles de communications sans-préfixe et sans mot vide. Soit  $f_0$  la fonction booléenne définie sur les mots binaires de 2 bits et dont la matrice est la suivante :

	y				
		00	01	10	11
x					
00		1	1	0	0
01		1	1	0	0
10		0	0	1	1
11		0	0	1	1

**Question 15.** Montrez que tout protocole de communication pour  $f_0$  nécessite au moins 4 scripts.

**Question 16.** Donnez un protocole de communication pour  $f_0$  de coût 2. [Son principe suffit.]