
Deux pages A4 de notes personnelles autorisées.

Questions de cours

Question 1. *Donnez les principales caractéristiques du modèle LOCAL.*

SOLUTION. [3 pts | \sum 3.0] Il s'agit d'un modèle synchrone, où tous les processeurs, qui possèdent un identifiant, démarrent en même temps, et les messages sont de taille illimitée.

Question 2. *Même question pour le modèle CONGEST et b-CONGEST.*

SOLUTION. [3 pts | \sum 6.0] Comme le modèle LOCAL sauf que les messages sont ici limités à b bits. Le modèle CONGEST est identique au modèle $O(\log n)$ -CONGEST, soit avec $b = O(\log n)$.

Complexité de communication

Question 3. *Dans le modèle b-CONGEST, expliquez ce qu'est, pour un graphe H fixé, le problème de la « détection d'un sous-graphe H » ? [NB : On ne demande pas sa solution, mais une explication de quelques lignes sur la définition du problème.]*

SOLUTION. [3 pts | \sum 9.0] Le problème est le suivant. En entrée on dispose d'un graphe G . Initialement les sommets connaissent leur identifiant et du sous-graphe H (qui est fixé). Il faut trouver un algorithme distribué qui, pour chaque sommet u , calcule une sortie booléenne $\text{DETECT}(u)$ qui est vrai si et seulement il existe une copie (au moins) de H dans G . L'algorithme doit fonctionner dans un mode synchrone où chaque message contient au plus b bits (b -CONGEST).

Question 4. *Expliquez ce qu'est un protocole de communication qui calcule une fonction booléenne f ? Quelles en sont les principales règles ? Quel est l'objectif recherché ?*

SOLUTION. [3 pts | \sum 12.0] C'est un algorithme qui permet à deux participants, Alice et Bob, d'échanger des messages jusqu'à obtenir la valeur $f(x, y)$ où x, y sont respectivement les entrées d'Alice et Bob. Ils s'échangent des messages chacun à leur tour, Alice commençant, et le dernier bit doit être la réponse. Bien sûr, chacun ne connaît que son entrée et le protocole à appliquer. L'objectif est de minimiser le nombre total de bits échangés.

Question 5. *À quel problème d'algorithmique distribué vu en cours la complexité de communication nous a-t-elle servi ? Citez le résultat.*

SOLUTION. [3 pts | \sum 15.0] On s'est servi de la complexité de communication pour démontrer que dans le modèle b -CONGEST, il fallait $\Omega(\sqrt{n}/b)$ rondes dans le pire des cas pour détecter un C_4 dans un graphe à n sommets.

On considère la fonction booléenne $\text{gt}_n(x, y) \in \{0, 1\}$ qui étant donné deux mots binaires x, y , chacun de n bits, renvoie 1 si et seulement si « $x > y$ » (*greater-than*), c'est-à-dire si l'entier codé en binaire par x est strictement supérieur à l'entier codé par y . Par exemple, $\text{gt}_2(11, 01) = 1$ car « $11 > 01$ ». En effet, $11_{\text{deux}} = 3_{\text{dix}} > 1_{\text{dix}} = 01_{\text{deux}}$.

Question 6. *Donnez la matrice de la fonction gt_n , pour $n = 2$.*

SOLUTION. [3 pts | $\sum 18.0$]

	y	00	01	10	11
x	00	0	0	0	0
01	1	0	0	0	
10	1	1	0	0	
11	1	1	1	0	

On rappelle qu'un ensemble discriminant pour une fonction booléenne f et une valeur $v \in \{0, 1\}$ est un ensemble F_v d'entrées (x, y) pour f tel que, pour tout $(x, y) \neq (x', y') \in F_v$, $f(x, y) = f(x', y') = v$ et $\bar{v} \in \{f(x, y'), f(x', y)\}$, où $\bar{v} = 1 - v$ est la valeur complémentaire de v . Cela revient donc à dire qu'on ne peut pas avoir $f(x, y') = f(x', y) = v$.

Question 7. Donnez un ensemble discriminant F_0 pour la fonction gt_2 qui soit le plus grand possible. Même question pour un ensemble discriminant F_1 .

SOLUTION. [3 pts | $\sum 21.0$] Soient $F_0 = \{(00, 00), (01, 01), (10, 10), (11, 11)\}$ et $F_1 = \{(01, 00), (10, 01), (11, 10)\}$. On a $|F_0| = 4$ et $|F_1| = 3$.

Question 8. Démontrez que tout ensemble discriminant F_v , pour une fonction booléenne f et valeur v données, ne peut avoir deux entrées qui sont situées sur une même ligne ou même colonne de la matrice de f .

SOLUTION. [3 pts | $\sum 24.0$] Supposons que $(x, y), (x', y') \in F_v$ avec $x' = x$ (même ligne). Alors par définition de F_v , $f(x, y) = f(x', y') = v$ et $\bar{v} \in \{f(x, y'), f(x', y)\} = \{f(x', y'), f(x, y)\} = \{v\}$: contradiction car $v \neq \bar{v}$. On obtient la même contradiction si $y' = y$ (même colonne).

Question 9. Généralisez la question 7 à tout entier n , c'est-à-dire construisez des ensembles discriminants F_0 et F_1 les plus grands possibles pour gt_n . Vous devez justifier les constructions ainsi que leur optimalité.

SOLUTION. [3 pts | $\sum 27.0$] De manière générale, $F_0 = \{(x, x) : x \in \{0, 1\}^n\}$ et $F_1 = \{(x + 1, x) : x \in [0, 2^n - 1]\}$. On a que F_0 est bien discriminant car F_0 correspond à une diagonale (de valeurs à 0) et les éléments inférieurs à cette diagonale sont tous égaux à 1. Les éléments de F_1 correspondent à une sous-diagonale (de valeurs à 1) où tous les éléments supérieurs sont égaux à 0.

Concernant la taille, on a $|F_0| = 2^n$ et $|F_1| = 2^n - 1$. L'optimalité de la taille se déduit de la question 8 pour $|F_0|$ puisque si $|F_v| > 2^n$, on aurait deux entrées sur la même ligne ou même colonne. Donc $|F_0|, |F_1| \leq 2^n$. De plus, $|F_1| = 2^n$ est impossible car il n'y a que deux diagonales de taille 2^n dans toute matrice $2^n \times 2^n$, et que pour celle de gt_n aucune ne possède de des 1. Donc $|F_1| < 2^n$.

Question 10. Expliquez ce qu'est un "script" pour un protocole de communication Π pour f et pour une entrée (x, y) donnée. Donnez l'énoncé de la propriété dite "des rectangles" que doit vérifier chaque script.

SOLUTION. [3 pts | $\sum 30.0$] C'est simplement la suite (m_0, m_1, \dots, m_t) des messages échangés lors de l'exécution de Π pour (x, y) . La propriété des rectangles affirme que si $\text{SCRIPT}_\Pi(x, y) = \text{SCRIPT}_\Pi(x', y')$, alors $\text{SCRIPT}_\Pi(x', y) = \text{SCRIPT}_\Pi(x, y') = \text{SCRIPT}_\Pi(x, y)$.

Question 11. Donnez un minorant, fonction de n , sur le nombre de scripts minimum de tout protocole de communication calculant gt_n . Justifiez. En déduire la complexité de communication de gt_n .

SOLUTION. [3 pts | $\sum 33.0$] C'est au moins $|F_0| + |F_1| = 2^n + 2^{n-1}$ à cause de la propriété des rectangles. La complexité de communication est au moins le logarithme en base deux du nombre minimum de scripts, ce qui fait $\geq \log_2(2^n + 2^{n-1}) > \log_2(2^n) = n$ bits, soit $n + 1$ bits. Ce n'était pas demandé, mais on note que ce minorant est optimal puisque la complexité de communication de toute fonction booléenne (sur des entrées de n bits) est au plus $n + 1$.

FIN.