

Bellman-Ford

Dans le cours, nous avons vu l'algorithme Bellman-Ford distribué permettant de calculer, dans le cas asynchrone, un arbre couvrant de plus courts chemins depuis un sommet racine r_0 fixé. Le principe, pour un sommet u , est d'envoyer la longueur d du chemin courant à r_0 à tous ses voisins dès que cette distance diminue tout en mettant à jour son père.

On rappelle qu'un graphe est dit *valué* si chaque arête uv possède un certain poids $\omega(uv) \in \mathbb{R}^+$. Bien évidemment, un arbre couvrant de plus courts chemins dans un graphe valué doit tenir compte du poids de ses arêtes.

Question 1. *Donnez une description de Bellman-Ford distribué, c'est-à-dire le pseudo-code pour un sommet u quelconque, lorsque le graphe est valué. Vous supposerez que la racine r_0 est connue de u ainsi que $\omega(uv)$ pour chaque voisin v de u .*

Nous avons également vu qu'il était possible que, dans un scénario asynchrone, Bellman-Ford distribué pouvait produire $2^{\Omega(n)}$ messages pour un certain graphe valué à n sommets, c'est-à-dire au moins 2^{cn} messages lorsque n est assez grand et pour une certaine constante $c > 0$. L'objectif de l'exercice est de montrer que dans tous les cas, l'algorithme ne peut pas produire plus de $2^{O(n \log \Delta)}$ messages où Δ est le degré maximum du graphe, c'est-à-dire le nombre maximum de voisins d'un sommet.

Étant donné un graphe G , on note $p(G)$ le nombre maximum de chemins différents de G qui partent d'un même sommet. Notez bien que : (1) un chemin ne peut pas passer deux fois par le même sommet ; (2) un chemin peut être composé d'un seul sommet et aucune arête ; et (3) le nombre de chemins peut différer selon le sommet d'origine.

Question 2. *Calculer $p(G_0)$ dans le cas où G_0 est le graphe particulier composé de deux cycles de longueur trois ayant un sommet en commun. Notez que G_0 a 5 sommets, 6 arêtes et un degré maximum $\Delta = 4$. Précisez le sommet d'origine réalisant $p(G_0)$.*

Question 3. *Expliquez pourquoi dans tout graphe valué G à n sommets, m arêtes et de degré maximum Δ , l'algorithme Bellman-Ford distribué ne peut pas produire plus de $(2m - n) \cdot p(G)$ messages.*

Soit $P(n, \Delta)$ le maximum de $p(G)$ pour un graphe ayant n sommets de degré maximum Δ .

Question 4. *En considérant le nombre maximum de chemins composés de i arêtes, pour $i = 0, 1, 2, \dots$, montrez que $P(n, \Delta) \leq 1 + \Delta \sum_{i=0}^{n-2} (\Delta - 1)^i$.*

Question 5. *En admettant que $\Delta \sum_{i=0}^{n-2} (\Delta - 1)^i < 2 \cdot (\Delta - 1)^{n-1}$, déduire que pour un graphe valué à n sommets et de degré maximum Δ , l'algorithme Bellman-Ford distribué produit au plus $2^{O(n \log \Delta)}$ messages.*

Question 6. *Pourquoi peut-on dire que le contre-exemple du cours montrant un scénario et un graphe valué produisant $2^{\Omega(n)}$ messages est, d'une certaine façon, optimal ?*

Détection

Question 7. *Rappelez les caractéristiques principales du modèle LOCAL. Même question pour le modèle CONGEST.*

Dans le cours, nous avons étudié des algorithmes distribués de détection de cycles de longueur 3 ou 4.

Question 8. De manière générale, pour un graphe H donné, expliquez en algorithmique distribuée ce qu'est le problème de la "détection d'un H " dans un graphe G ?

Pour tout graphe connexe G , on définit le *rayon* de G , noté $\text{rad}(G)$, comme le minimum de la profondeur d'un arbre couvrant G . Dit autrement, c'est l'excentricité minimum d'un sommet de G , soit $\text{rad}(G) = \min_{u \in V(G)} \{\text{ecc}_G(u)\}$. Ici les arêtes n'ont pas de poids, elles comptent pour 1.

Question 9. Donnez le rayon d'une grille 3×3 , c'est-à-dire du graphe à 9 sommets formé à partir d'une grille de 3 lignes et 3 colonnes. En plus de la valeur du rayon, dessinez le graphe ainsi que l'arbre de profondeur minimum. Quel est le diamètre de la grille ?

Question 10. Même question pour une grille 4×4 : rayon, dessin et diamètre.

Question 11. Exprimez, dans le modèle LOCAL, un algorithme permettant de détecter un cycle de longueur 5. Précisez le nombre de rondes.

Question 12. Expliquez le principe d'un algorithme permettant de détecter dans le modèle LOCAL un graphe H supposé connu des sommets. Exprimez le nombre de rondes en fonction de $\text{rad}(H)$.

Coloration

Dans tout l'exercice, on considèrera des algorithmes distribués s'exécutant dans le modèle LOCAL. Pour un sommet u d'un graphe G à n sommets, on notera $\text{ID}(u)$ l'identifiant du sommet u , un entier unique de $\{0, \dots, n-1\}$. Pour un sous-ensemble $W \subseteq V(G)$ de sommets de G , on notera $\text{ID}(W) = \{\text{ID}(u) : u \in W\}$ l'ensemble des identifiants des sommets de W . Pour tout sous-ensemble $X \subset \mathbb{N}$, on notera $\text{FIRSTFREE}(X) = \min(\mathbb{N} \setminus X)$, c'est-à-dire le plus petit entier naturel qui n'est pas dans X . Par exemple, $\text{FIRSTFREE}(\{0, 1, 2, 4, 8\}) = 3$ et $\text{FIRSTFREE}(\{0\}) = 1$.

Question 13. Montrez que $\text{FIRSTFREE}(X) \leq |X|$ où $|X|$ représente le nombre d'éléments de X .

On considère l'algorithme **A** consistant, pour chaque sommet u d'un graphe G , à calculer en parallèle $\text{FIRSTFREE}(\text{ID}(N(u)))$, et on notera $c(u)$ cet entier. Rappelons que $N(u)$ représente l'ensemble des voisins de u dans G .

Question 14. Écrivez l'algorithme **A** et donner le nombre de rondes.

Question 15. Donnez un graphe connexe G à n sommets, et les identifiants pour ses sommets, où l'application de **A** ne produit que deux valeurs différentes pour la variable c . Quelles sont ces valeurs ?

Question 16. Donnez un graphe connexe G à n sommets, et les identifiants pour ses sommets, où l'application de **A** produit $c(u) = \text{ID}(u)$ pour chaque sommet u .

On considère l'algorithme **B** consistant à faire, pour chaque sommet u d'un graphe connexe G :

1. $c(u) := \text{ID}(u)$
2. pour $k := n-1, n-2, \dots, 4, 3$ faire :
 - (a) NEWPULSE
 - (b) si $c = k$, alors $c(u) := \text{FIRSTFREE}(\text{ID}(N(u)))$

Question 17. Quel est le nombre de rondes de l'algorithme **B** ?

Question 18. Exprimez en fonction du degré maximum Δ de G le nombre maximum de valeur différentes pour $c(u)$?

FIN.