



Master2 Informatique

UE: ALGORITHMIQUE DISTRIBUÉE – 4TIN913U

Responsable : C. Gavaille

Date : 7 janvier 2026

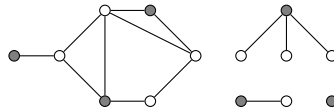
Durée : 1h30

Document: une feuille A4 recto-verso autorisée.

La langue pour vos réponses peut-être le français ou l'anglais, mais pas les deux!

Petit Ensemble Dominant

On considère le problème consistant à construire dans un graphe G un ensemble dominant S de taille $|S| \leq |V(G)|/2$. On notera SDS un tel ensemble. On rappelle qu'un ensemble S est dominant pour G , si tout sommet de qui n'est pas dans S possède un voisin dans S . Un ensemble dominant S est *minimum* si sa taille $|S|$ est la plus petite possible parmi tous les ensembles dominants pour le graphe. On notera MDS un tel ensemble. Ci-dessous figure un exemple de SDS pour un graphe non connexe à 14 sommets.



Question 1. Déterminez un MDS pour le graphe ci-dessus en précisant sa taille. Un dessin avec le MDS distingué suffit. Justifiez le fait que votre solution est de taille minimum.

Question 2. Quelle est, en fonction de n , la taille d'un MDS pour C_n , le cycle à n sommets. Justifiez votre réponse.

On souhaite calculer un SDS pour C_n à l'aide d'un algorithme distribué dans le modèle LOCAL. Pour cela, on va suppose que C_n possède une 3-coloration arbitraire c , et on notera $c(u) \in \{0, 1, 2\}$ la couleur du sommet u . Donc au démarrage, chaque sommet u dispose de $c(u)$ ainsi que son identifiant $ID(u) \in \{0, \dots, n-1\}$. Notez bien que sans communiquer, u ne peut ni déterminer n ni la couleur la plus fréquente par exemple. Vous ne pouvez faire aucune hypothèse particulière sur c . Selon le cours, elle a pu, par exemple, être calculée en $\log^*(n) + O(1)$ rondes.

Question 3. Rappelez la définition de la fonction $\log^*(n)$? Que vaut $\log^*(16)$?

Question 4. Montrez que pour tout entiers n, b tels que $1 \leq b \leq n/2$, il existe une 3-coloration de C_n où l'une des couleurs apparait exactement b fois.

Question 5. Pourquoi une telle 3-coloration ne peut pas exister pour C_n si $b = 0$ ou $b > n/2$?

On propose un premier algorithme distribué $A1$ calculant un SDS pour C_n . On supposera que la solution S est codée par une variable $s(u) \in \{\text{TRUE}, \text{FALSE}\}$ indiquant si $u \in S$ ou pas.

L'algorithme $A1$, sans ronde de communication, sélectionne u si et seulement si $c(u) = 0$. Autrement dit :

A1 : if $c(u) = 0$, then $s(u) := \text{TRUE}$ else $s(u) := \text{FALSE}$

Question 6. En vous appuyant sur les questions précédentes, démontrez que $A1$ n'est pas correct.

On se propose alors d'analyser un deuxième algorithme $A2$, probabiliste cette fois-ci, qui utilise la fonction $\text{RANDOM}(3)$ renvoyant un entier aléatoire uniforme pris dans $\{0, 1, 2\}$. On supposera que la fonction RANDOM est implémentée de la même manière sur tous les sommets, notamment que la graine initiale au

démarrage est la même. Donc le premier appel à $\text{RANDOM}(3)$ donnera la même valeur pour tous les sommets qui l'exécute.

L'algorithme $A2$, également de zéro ronde, consiste alors à faire :

$A2$: if $c(u) = \text{RANDOM}(3)$, then $s(u) := \text{TRUE}$ else $s(u) := \text{FALSE}$

Question 7. *D'après vous, est-ce que la probabilité que la solution S calculée par $A2$ soit un SDS pour C_n est $\geq 1/2$? Justifiez.*

Pour vos algorithmes à venir, vous pourrez utiliser les deux primitives de communication suivantes :

- $\text{SENDALL}(m)$: envoie le message m à tous les voisins de u .
- $\text{RECEIVEALL}()$: renvoie la liste des messages reçus par u et émis à la ronde courante.

Vous pourrez utiliser NEWROUND pour d'indiquer le démarrage d'une nouvelle ronde.

Question 8. *Proposez un algorithme (déterministe), évitant les écueils d' $A1$ et $A2$, permettant de calculer un SDS pour C_n supposé 3-colorié. Précisez le nombre de rondes. [Aide : Il en existe un qui s'exécute en seulement $O(1)$ rondes.]*

On se propose maintenant de faire le contraire : calculer une 3-coloration pour C_n à partir d'un ensemble dominant supposé minimum.

Question 9. *Proposez un algorithme permettant de calculer une 3-coloration pour C_n en supposant connu un MDS pour C_n . Précisez bien le nombre de rondes.*

Question 10. *En déduire qu'il n'est pas possible de calculer un MDS pour C_n en $o(\log^*(n))$ rondes.*

Complexité de communication

Question 11. *Expliquez ce qu'est un protocole de communication qui calcule une fonction booléenne f ? Quelles en sont les principales règles ? Quel est l'objectif recherché ?*

Question 12. *Pour démontrer quel résultat d'algorithmique distribuée vu en cours la complexité de communication nous a-t-elle servi ?*

Question 13. *Rappelez la définition d'un ensemble discriminant F_v pour une fonction booléenne f et une valeur $v \in \{0, 1\}$.*

On notera $\text{CC}(f)$ la complexité de communication de f .

Question 14. *Démontrez que si f possède un ensemble discriminant F_v tel que $|F_v| \geq 2^k$, pour un certain entier $k \geq 1$ et une valeur $v \in \{0, 1\}$, alors $\text{CC}(f) \geq k + 1$. [Aide : Attention au « +1 » ! Utilisez les liens établis dans le cours entre $\text{CC}(f)$, le nombre de scripts et la taille des ensembles discriminants.]*

Soit Π un protocole de communication pour une certaine fonction f tels que Π ne génère que deux scripts possibles sur toutes les entrées $(x, y) \in \{0, 1\}^{2n}$ de f .

Question 15. *Montrez qu'Alice et Bob peuvent, en interne, utiliser Π pour calculer $f(x, y)$ en échangeant au plus 2 bits au total, quelle que soit l'entrée (x, y) . Ce nouveau protocole devra être sans préfixe.*

On considère la fonction $\text{lt}_n(x, y) \in \{0, 1\}$ (pour *less-than*) qui étant donnés deux mots binaires x, y , chacun de n bits, renvoie 1 si et seulement si « $x < y$ », c'est-à-dire si les entiers représentés en binaires par les mots x et y vérifient $x < y$. Par exemple, $\text{lt}_2(11, 10) = 0$. En revanche, $\text{lt}_2(01, 10) = 1$. Bien évidemment, $\text{lt}_n(x, x) = 0$ pour tout $x \in \{0, 1\}^n$.

Question 16. *Calculez $\text{CC}(\text{lt}_n)$. Justifiez. [Aide : Notez que $\text{CC}(\text{lt}_n) \leq n + 1$.]*

FIN.