



Master2 Informatique

UE: ALGORITHMIQUE DISTRIBUÉES – 4TIN913U

Responsable : M. Gavaille

Date : 10 janvier 2024

Durée : 1h30

Cours et notes de cours papier autorisés

---

## Complexité de communication

**Question 1.** Dans le modèle  $b$ -CONGEST, expliquez ce qu'est, pour un graphe  $H$  fixé, le problème de la « détection d'un sous-graphe  $H$  » ? [NB : On ne demande pas sa solution.]

**Question 2.** Expliquez ce qu'est un protocole de communication qui calcule une fonction booléenne  $f$ , quelles en sont les principales règles ? Quel est l'objectif recherché ?

**Question 3.** À quel problème d'algorithmique distribué vu en cours la complexité de communication nous a-t-elle servi ? Citez le résultat.

On considère la fonction booléenne  $gt_n(x, y) \in \{0, 1\}$  qui étant donné deux mots binaires  $x, y$ , chacun de  $n$  bits, renvoie 1 si et seulement si «  $x > y$  » (*greater-than*), c'est-à-dire si l'entier codé en binaire par  $x$  est strictement supérieur à l'entier codé par  $y$ . Par exemple,  $gt_2(11, 01) = 1$  car «  $11 > 01$  ». En effet,  $11_{\text{deux}} = 3_{\text{dix}} > 1_{\text{dix}} = 01_{\text{deux}}$ .

**Question 4.** Donnez la matrice de la fonction  $gt_n$ , pour  $n = 2$ .

On rappelle qu'un ensemble discriminant pour une fonction booléenne  $f$  et une valeur  $v \in \{0, 1\}$  est un ensemble  $F_v$  d'entrées  $(x, y)$  pour  $f$  tel que, pour tout  $(x, y) \neq (x', y') \in F_v$ ,  $f(x, y) = f(x', y') = v$  et  $\bar{v} \in \{f(x, y'), f(x', y)\}$ , où  $\bar{v} = 1 - v$  est la valeur complémentaire de  $v$ . Cela revient donc à dire qu'on ne peut pas avoir  $f(x, y') = f(x', y) = v$ .

**Question 5.** Donnez un ensemble discriminant  $F_0$  pour  $gt_2$  le plus grand possible. Même question pour un ensemble discriminant  $F_1$ .

**Question 6.** Démontrez que tout ensemble discriminant  $F_v$ , pour une fonction  $f$  et valeur  $v$  données, ne peut avoir deux entrées qui sont situées sur une même ligne ou même colonne de la matrice de  $f$ .

**Question 7.** Généralisez la question 5 à tout  $n$ , c'est-à-dire construisez des ensembles discriminants  $F_0$  et  $F_1$  les plus grands possibles pour  $gt_n$ . Vous devez justifier les constructions ainsi que leur optimalité.

**Question 8.** Donnez un minorant, fonction de  $n$ , sur le nombre de scripts minimum de tout protocole de communication calculant  $gt_n$ . Justifiez. En déduire la complexité de communication de  $gt_n$ .

# Bellman-Ford

Dans le cours, nous avons vu l'algorithme de Bellman-Ford distribué (BFD) permettant de calculer, dans le cas asynchrone, un arbre couvrant de plus courts chemins dans un graphe  $G$  depuis un sommet racine  $r_0$  fixé. Le principe, pour un sommet  $u$ , est d'envoyer à tous ses voisins la longueur du chemin courant menant à  $r_0$  (longueur représentée par une variable  $\text{LAYER}(u)$ ), dès que cette longueur diminue, tout en mettant à jour son père.

On rappelle qu'un graphe  $(G, \omega)$  est dit *valué* (on dit parfois *pondéré*) si chaque arête  $uv$  possède un certain poids  $\omega(uv) \in \mathbb{R}^+$ . Bien évidemment, un arbre couvrant de plus courts chemins dans un graphe valué doit tenir compte du poids de ses arêtes. Un graphe est dit *non valué* si le poids de chaque arête est unitaire (donc compte pour 1).

**Question 9.** *Donnez une description de BFD, c'est-à-dire le pseudo-code comme vu en cours pour un sommet  $u$  quelconque, lorsque le graphe  $G$  est valué. Vous supposerez que la racine  $r_0$  est connue de  $u$  ainsi que  $\omega(uv)$  pour chaque voisin  $v$  de  $u$ .*

**Question 10.** *Modifiez votre pseudo-code de façon à ce que chaque sommet  $u$  possède, en plus de la variable  $\text{PERE}(u)$ , une variable  $\text{FILS}(u)$  contenant tous ses fils dans l'arbre calculé par BFD.*

**Question 11.** *Décrivez un graphe non valué à  $n$  sommets et un scénario catastrophe où BFD produit  $\Omega(n^3)$  messages.*

Pour un graphe  $G$  sur lequel s'exécute BFD, on notera  $D$  le diamètre du graphe,  $n$  le nombre de sommets et  $m$  le nombre d'arêtes. Pour tout sommet  $u$ , on note  $\mu(u)$  le nombre de fois où le sommet  $u$  met à jour sa variable locale  $\text{LAYER}(u)$  durant l'exécution de BFD dans le pire des scénarios. On a vu dans le cours que le nombre de messages produits par l'algorithme était plus petit que  $\sum_{u \in V(G)} \mu(u) \cdot \deg(u) \leq 2m\mu$ , où  $\mu = \max_{u \in V(G)} \mu(u)$ . Nous avons aussi vu, dans le cas non valué, que  $\mu(u) < n$  pour tout sommet  $u$  de  $G$ .

**Question 12.** *Tout en justifiant, donnez un majorant sur le nombre de messages de BFD sur un graphe non valué dans le cas d'un scénario synchrone.*

Pour tout réel  $\alpha \in [0, 1]$ , on dira qu'un scénario est  $\alpha$ -synchrone si chaque message prend un temps au moins  $\alpha$  pour traverser une arête. Dit autrement, le temps de traversée de chaque message prend un temps imprévisible appartenant à  $[\alpha, 1]$ . Le cas 1-synchrone correspond au cas synchrone et 0-synchrone au cas asynchrone.

**Question 13.** *Donnez un majorant du nombre de messages de BFD lors d'un scénario  $\alpha$ -synchrone dans le cas non valué, en fonction des paramètres  $n, m, D$  et bien sûr  $\alpha$  que vous pourrez supposer non nul<sup>1</sup> [Aide : Bornez la longueur du chemin construit de  $u$  à  $r_0$  en fonction de la distance de  $u$  à  $r_0$ .]*

**Question 14.** *En supposant que les poids des arêtes du graphe  $G$  sont des entiers de  $\{1, \dots, W\}$ , donnez un majorant sur le nombre de messages générés par BFD pour  $G$  dans ce cas.*

**Question 15.** *Même question si, de plus, le scénario est  $\alpha$ -synchrone.*

Étant donné un graphe  $G$  et un sommet  $r_0$ , soit  $\Gamma(G, r_0)$  l'ensemble de tous les chemins simples<sup>2</sup> de  $G$  issus de  $r_0$ . Si le graphe est valué par  $\omega$ , on notera  $\omega(P)$  le coût d'un chemin  $P$ , la somme des poids de ses arêtes, en posant  $\omega(P) = 0$  si  $P = \{r_0\}$  n'a pas d'arête. Notez que les chemins de  $\Gamma(G, r_0)$  ne dépendent pas de  $\omega$  et possèdent entre 0 et  $n - 1$  arêtes. Il est facile de voir, par exemple, que si  $G$  est un chemin et  $r_0$  une de ses extrémités, alors  $|\Gamma(G, r_0)| = |V(G)| = n$ .

**Question 16.** *Combien vaut  $|\Gamma(G, r_0)|$  au maximum si  $G$  est un arbre de racine  $r_0$ , de hauteur  $h$  et*

---

1. En effet, on pourra supposer que  $\alpha$  peut approcher 0 arbitrairement près sans jamais l'atteindre.  
2. C'est-à-dire des chemins ne passant pas deux fois par le même sommets.

avec  $k$  feuilles ? Combien au minimum ? Donnez un exemple qui atteint ce minimum (pour chaque  $h$  et  $k$  donnés).

L'objectif est de généraliser la question 14 en tenant compte plus finement des coûts des chemins possibles. Soit  $\mathcal{W}(G, \omega, r_0) = \{\omega(P) : P \in \Gamma(G, r_0)\}$ , c'est-à-dire l'ensemble des coûts possibles pour les chemins de  $\Gamma(G, r_0)$ . Notez que  $|\mathcal{W}(G, \omega, r_0)| \leq |\Gamma(G, r_0)|$ , puisqu'au pire les chemins ont des coûts tous différents. Il y a égalité dans l'exemple précédent, où  $G$  est un chemin et  $r_0$  une de ses extrémités. On utilisera la notation allégée  $|\mathcal{W}|$  et  $|\Gamma|$  lorsque les paramètres  $G, \omega, r_0$  sont sous-entendus.

**Question 17.** Calculez  $|\Gamma|$  et  $|\mathcal{W}|$  dans le cas d'un cycle  $G$  à cinq sommets où les poids des arêtes sont uniformes.

**Question 18.** Généralisez à un cycle  $G$  à  $n$  sommets avec des poids uniformes. En déduire que  $|\Gamma|/|\mathcal{W}| \rightarrow 2$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .

**Question 19.** Décrivez un exemple de graphe  $G$  à  $n$  sommets avec un sommet  $r_0$  et des poids uniformes où  $|\mathcal{W}| = O(1)$  alors que  $|\Gamma| = \Omega(n^2)$ . [Aide : Pensez à un graphe de petit diamètre.]

**Question 20.** Majorez le nombre de messages pour BFD appliqué à un graphe valué général  $(G, \omega)$  depuis  $r_0$  en fonction des paramètres précédents, notamment  $|\Gamma|$  et/ou  $|\mathcal{W}|$ . Justifiez.