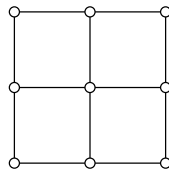




Un *Ensemble Indépendant Maximal*, noté MIS, dans un graphe G est un ensemble indépendant M qui est maximal pour l'inclusion. Plus précisément, M est un sous-ensemble de sommets deux-à-deux non adjacents (indépendant) et tel que tout sommet qui n'est pas dans M possède au moins un voisin dans M (maximal).

Question 1. *Donnez une 3-coloration du graphe ci-dessous telle que, pour chaque couleur $i = 0, 1, 2$, l'ensemble des sommets de couleur i n'est pas un MIS.*



Dans toute la suite on considèrera le modèle LOCAL.

Question 2. *Rappelez les caractéristiques principales du modèle LOCAL.*

On rappelle qu'un graphe G est 1-orienté s'il est orienté de sorte que chacun de ses sommets a au plus un arc sortant. En distribué, dire que G est 1-orienté signifie que chaque sommet u ayant un arc sortant $u \rightarrow v$ possède une variable locale $\text{PARENT}(u) = v$. On posera $\text{PARENT}(w) = \perp$ si w n'a pas d'arc sortant. De manière similaire, on dira que G possède un certain sous-ensemble M (disons un MIS) si chaque sommet u possède une variable locale $M(u)$ qui est VRAI ssi $u \in M$.

Question 3. *Considérons un cycle 1-orienté avec un MIS M . Donnez un algorithme distribué en temps constant qui calcule dans une variable COLOR une 3-coloration pour ce graphe. Précisez le nombre de rondes.*

On aimerait maintenant faire la même chose, non seulement pour les cycles, mais aussi pour des graphes généraux. Malheureusement, cela ne marche pas toujours.

Question 4. *Construisez un graphe 1-orienté avec un MIS particulier pour lequel l'algorithme que vous avez donné à la question précédente échoue, c'est-à-dire ne produit pas de 3-coloration.*

Question 5. *En généralisant éventuellement votre construction précédente, décrivez un graphe 1-orienté à n sommets avec un MIS pour lequel le nombre de rondes de tout algorithme distribué de 3-coloration est non borné. Donnez une borne inférieure en terme de n sur ce nombre de rondes. (Aide : Utiliser la borne inférieure prouvée en cours pour les cycles orientés.)*

Un algorithme simple pour calculer un MIS M consiste à appliquer (si possible en parallèle) la règle suivante : si un sommet u et aucun de ses voisins n'est dans M , ajoute u à M , sous la condition qu'aucun des voisins de u n'appliquent la règle en même temps.

Question 6. *Soit G un graphe avec n sommets ayant une k -coloration décrite par la variable COLOR. Donnez un algorithme distribué calculant un MIS M pour G . Explicitiez le nombre de rondes.*

Question 7. *Expliquez brièvement comment calculer de manière distribué un MIS pour un cycle ou un chemin à n sommets en $O(\log^* n)$ rondes. (Attention ! Contrairement aux questions précédentes, les graphes ici ne sont pas orientés.)*

On considère maintenant le problème de construire efficacement un “petit” ensemble dominant. Le but est de montrer qu’en $O(\log^* n)$ rondes il est possible de calculer un petit ensemble dominant pour tout graphe connexe et 1-orienté.

On rappelle qu’un ensemble dominant pour un graphe G est un sous-ensemble de sommets D tel que tout sommet de G est soit dans D soit à un voisin dans D . Notez bien qu’un MIS est un ensemble dominant particulier. On dira qu’un sous-ensemble de sommets $X \subseteq V(G)$ est petit s’il existe une constante $\lambda < 1$ telle¹ que $|X| < \lambda n + 1$ où $n = |V(G)|$. Par exemple un ensemble X de cardinalité $n - 2$ n’est pas petit. Mais un ensemble de cardinalité $n/2 + 2$ est petit.

Question 8. *Construire un graphe à n sommets et $m \leq n$ arêtes sans petit ensemble dominant.*

Question 9. *Montrez que tout MIS d’un graphe connexe de degré maximum deux possède un petit ensemble dominant.*

Soit G un graphe connexe 1-orienté. On considère les deux ensembles de sommets suivants : $B := \{u : \deg(u) > 2\}$ (les *big*, les sommets de “gros” degré); et $S := V(G) \setminus B$ (les *small*, les sommets de “petit” degré). L’idée générale pour construire un petit ensemble dominant va être d’utiliser une stratégie différente suivant si les sommets sont dans B ou dans S .

Pour les sommets de B , c’est très simple : on les ajoute tous à l’ensemble souhaité D . (Il va falloir argumenter pour dire que B est nécessairement petit). Pour les sommets de S , l’idée est de calculer un MIS M pour $G[S]$, le sous-graphe induit par S . Ensuite on aimerait pouvoir dire que l’ensemble $D := B \cup M$ est un petit ensemble dominant.

Malheureusement, cela ne marche pas car le graphe $G[S]$ n’est pas nécessairement connexe et possède très peu d’arêtes. On ne peut donc pas déduire qu’il possède un petit ensemble dominant à cause de la question 8. Observez aussi que l’union de deux petits ensembles disjoints n’est pas forcément petits.

Heureusement, puisque $B \subseteq D$, on peut analyser plus finement la situation des sommets de S , et appliquer la règle locale supplémentaire : un sommet $u \in S$ est ajouté à D seulement si $u \in M$ et u a au moins un voisin dans S .

Question 10. *Résumer la discussion précédente en donnant un algorithme distribué qui, étant donné un graphe connexe 1-orienté à $n > 1$ sommets, calcule un petit ensemble dominant D pour G en $O(\log^* n)$ rondes. Exprimez la valeur λ qui borne la taille de D .*

FIN.

1. $|X|$ est la cardinalité de l’ensemble X .