Master S&T Informatique
INF 323 – Algorithmes distribués – 1ère session
Responsable : M. Gavoille
Date : 5 mai 2006   Durée : 1h30

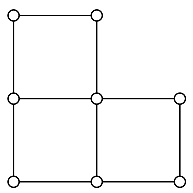
Manuscripts et polycopiés autorisés, livres interdits.

Question 1. Expliquer pourquoi, éventuellement en donnant un exemple, un algorithme distribué déterministe peut avoir plusieurs exécutions différentes, et donc fournir des résultats différents, sur le même graphe et avec les mêmes entrées.

Question 2. Rappeler la définition d'un Ensemble Indépendant Maximal pour un graphe G, que l'on notera EIM dans la suite.

On rappelle qu'une k-coloration pour un graphe G est une fonction $c : V(G) \to \{1, \ldots, k\}$ telle que $c(u) \neq c(v)$ pour toute arête $\{u, v\} \in E(G)$. Pour une coloration c de G, on note C_i l'ensemble des sommets de G coloriés i. Plus formellement $C_i = \{u \in V(G) \mid c(u) = i\}$.

Question 3. Pour le graphe dessiné ci-dessous, donner une 3-coloration c telle qu'aucun des ensembles C_1, C_2, C_3 ne soit un EIM pour G.

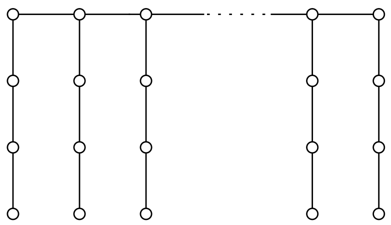


Question 4. Démontrer que si G est un graphe connexe possédant une 2-coloration c, alors les ensembles C_1 et C_2 sont tout deux des EIM pour G.

Question 5. Rappeler les caractéristiques du modèle LOCAL.

On généralise la notion d'ensemble dominant vu en cours de la manière suivante. Un ensemble M de sommets de G est *k-dominant* si pour tout sommet $u \in V(G)$, il existe un sommet $v \in M$ à distance au plus k de u. Un ensemble dominant est donc un ensemble 1-dominant.

Question 6. Démontrer que tout ensemble 3-dominant M pour l'arbre dessiné ci-dessous (un peigne à t branches) à $n = 4t$ sommets, $t \in \mathbb{N}^*$, est de cardinalité $|M| \geqslant n/4$.



T.S.V.P.

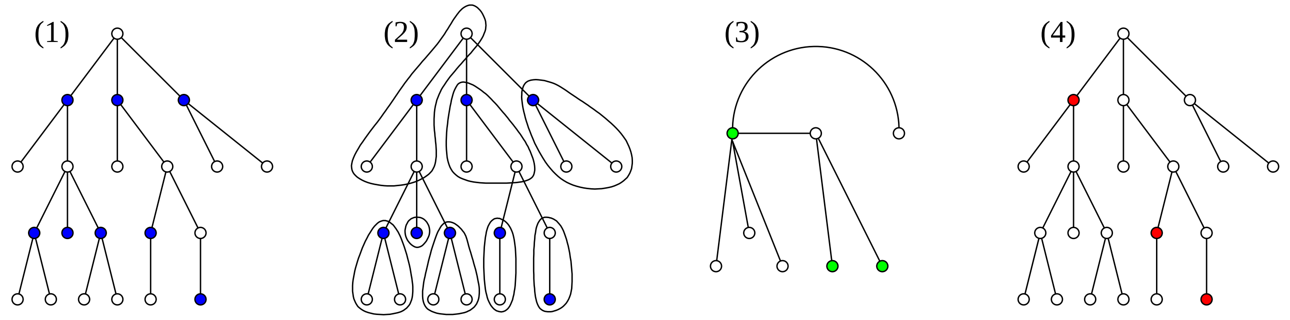
On supposera connu l'algorithme distribué SmallDom vu en cours, calculant pour tout arbre à n sommets un ensemble dominant M d'au plus $n/2$ sommets et ceci en temps $f(n) = O(\log^* n)$ dans le modèle LOCAL. On supposera que SmallDom donne en sortie pour chaque sommet u une variable $m(u) \in \{0, 1\}$ telle que $m(u) = 1$ si et seulement $u \in M$.

On veut concevoir un algorithme distribué SmallDom2 dans le modèle LOCAL permettant de construire un "petit" ensemble 3-dominant ou 4-dominant pour tout arbre à n sommets. L'idée est d'appliquer deux fois la procédure SmallDom. Dans la suite un *cluster* est un sous-graphe connexe, ici un sous-arbre.

Plus précisément on réalise les quatres étapes suivantes, chacune illustrée sur la figure ci-dessous :

Algorithme SmallDom2 :

(1) Construire un ensemble dominant M avec SmallDom (sommets colorés).
(2) Partitionner les sommets en clusters en fonction de M (voir détails ci-après).
(3) Construire un ensemble dominant M' pour l'arbre des clusters avec SmallDom.
(4) Le résultat est $M'' = \{x \in M \cap C \mid C \in M'\}$, les sommets de M appartenant à un cluster de M'.



En plus de former un sous-arbre et une partition des sommets, chaque cluster doit vérifier les deux propriétés suivantes : (P1) Il y a exactement un sommet de M par cluster. (P2) Dans un cluster C, tout sommet $u \notin M$ doit être voisin de l'unique sommet $x \in M \cap C$.

L'arbre des clusters utilisé à l'étape (3) est obtenu en contractant toutes les arêtes internes des clusters formés à l'étape (2).

Question 7. Donner un algorithme distribué (modèle LOCAL) permettant de construire de tels clusters à partir d'un ensemble dominant M, donné par la variable m. Plus précisément, la sortie de l'algorithme sera, pour chaque sommet u, une variable $c(u)$ indiquant le nom du sommet de M de son cluster. Dit autrement, si C est un cluster et si x est l'unique sommet de $M \cap C$, alors on doit avoir $c(u) = x$ pour tout $u \in C$.

Pour cela vous utiliserez du pseudo-code pouvant comporter les instructions comme SEND, RECEIVE, SENDALL, ...

Question 8. Montrer que SmallDom2 calcule un ensemble M'' qui est k-dominant avec $k \leqslant 4$. Est-ce que 4 est la meilleure borne possible ? Par exemple, est-ce que pour tout arbre $k \leqslant 3$ ou pas ? Sinon, donner un contre-exemple M'' où $k \geqslant 4$, c'est-à-dire l'exemple d'un arbre et un ensemble dominant M de cardinalité $\leqslant n/2$ où la stratégie adoptée par SmallDom2 donnera un sommet à distance 4 de M''.

Question 9. Montrer que l'ensemble construit par SmallDom2 est de cardinalité au plus $n/4$.

Question 10. Donner la complexité en TEMPS de SmallDom2 (vous pourrez aussi l'exprimer en fonction de f).

Question 11. Donner le pseudo-code pour SmallDom2. Sans réecrire et adapter les algorithmes vus en cours, vous pourrez plus simplement expliquer comment simuler chaque instruction de communication de SmallDom lorsqu'elle est appliquée à l'arbre des clusters mais exécutée sur l'arbre initial (étape (3) de SmallDom2).

FIN.