
La langue pour vos réponses peut-être le français ou l'anglais, mais pas les deux! Document: une feuille A4 recto-verso autorisée.

Question de cours

Question 1. *Rappelez les principales caractéristiques des modèles LOCAL, CONGEST et b-CONGEST.*

Question 2. *Expliquez à quoi correspond le problème d'algorithmique distribué de la « détection d'un H » dans le graphe G , pour un graphe H fixé? [NB : On ne demande pas sa solution, mais les spécificités en terme d'entrées et de sorties.]*

Question 3. *Donnez le principe d'un algorithme dans le modèle LOCAL permettant de détecter un C_6 , un cycle de longueur six, dans un graphe G . Précisez le nombre de rondes.*

Question 4. *En déduire un algorithme de détection de C_6 dans le modèle CONGEST. Précisez sa complexité en temps (nombre de rondes) en fonction du degré maximum Δ du graphe G .*

Complexité de communication

Question 5. *Expliquez ce qu'est un protocole de communication qui calcule une fonction booléenne f ? Quelles en sont les principales règles? Quel est l'objectif recherché?*

Question 6. *Expliquez le principe du protocole « trivial » pour le calcul de f . Quel est son coût?*

On considère la fonction $\text{aleq}_n(x, y) \in \{0, 1\}$ (pour *ALmost EQUAL*) qui étant donnés deux mots binaires x, y , chacun de n bits, renvoie 1 si et seulement si « $|x - y| \leq 1$ », c'est-à-dire si les entiers représentés en binaires par les mots x et y diffèrent d'au plus une unité. Par exemple, $\text{aleq}_2(11, 10) = 1$ car $|3 - 2| \leq 1$. En revanche, $\text{aleq}_2(01, 11) = 0$ car $|1 - 3| \not\leq 1$. Bien évidemment, $\text{aleq}_n(x, x) = 1$ pour tout $x \in \{0, 1\}^n$.

Question 7. *Donnez la matrice de la fonction aleq_n pour $n = 2$.*

On rappelle qu'un ensemble discriminant pour une fonction booléenne f et une valeur $v \in \{0, 1\}$ est un ensemble F_v d'entrées (x, y) pour f tel que, pour tout $(x, y) \neq (x', y') \in F_v$, $f(x, y) = f(x', y') = v$ et $\bar{v} \in \{f(x, y'), f(x', y)\}$, où $\bar{v} = 1 - v$ est la valeur complémentaire de v .

Question 8. *Donnez un ensemble discriminant F_1 pour aleq_2 le plus grand possible et donnez sa cardinalité. Même question pour un ensemble discriminant F_0 .*

Question 9. *Expliquez la structure de la matrice de la matrice aleq_n pour $n \geq 3$.*

Question 10. *Rappelez la définition de $\text{CC}(f)$, la complexité de communication d'une fonction booléenne f .*

Question 11. *Généralisez la question 8 à tout $n \geq 3$, c'est-à-dire construisez des ensembles discriminants F_1 et F_0 les plus grands possibles pour aleq_n et donnez leurs cardinalités.*

Question 12. *Donnez un minorant, fonction de n , sur le nombre de scripts de tout protocole de communication calculant aleq_n . Justifiez. En déduire la valeur exacte de $\text{CC}(\text{aleq}_n)$.*

On considère la fonction d'égalité $eq_n(x, y) \in \{0, 1\}$ qui vaut 1 si et seulement si les mots binaires de n bits x et y sont égaux. On pourra admettre que $\text{CC}(eq_n) = n + 1$.

Question 13. *Donnez les détails d'un protocole de communication sans mot vide de coût $n + 2$ calculant eq_n en 4 rondes de sorte qu'Alice transmet la moitié des bits de x à Bob et que Bob transmet la moitié des bits de y à Alice. Vous pourrez supposer n pair.*

On considère un processus de transmission particulier, noté $T_{1,2}$, qui consiste à envoyer des petits messages de longueur variable. Plus précisément, le participant (disons Alice) qui souhaite envoyer un mot binaire $S = s_0 s_1 s_2 \dots s_{t-1}$ de t bits à l'autre (Bob) le découpe en messages d'1 ou 2 bits. Lorsque c'est à son tour, et que les bits $s_0 \dots s_{i-1}$ ont déjà été transmis, Alice envoie dans son message le bit $m = s_{i+1}$ si $s_i = 0$, ou envoie les deux bits $m = s_{i+1} s_{i+2}$ si $s_i = 1$. Notez que dans tous les cas, s_i n'est pas directement transmis. Cependant Bob, qui reçoit un tel petit message m , peut en déduire les bits $s_i s_{i+1}$ ou $s_i s_{i+1} s_{i+2}$ en fonction de la taille $|m| \in \{1, 2\}$. Si $i \in \{t-2, t-1\}$, les bits s_{i+1} et s_{i+2} peuvent ne pas exister. Dans ce cas Alice ajoute 1 ou 2 bits arbitraires, ce qui ne pose pas de problème à Bob qui ne tiendra pas compte de ces bits s'il connaît t .

Question 14. *En vous inspirant du protocole de la question 13, combinée avec le processus de transmission $T_{1,2}$, donnez un protocole de communication sans mot vide calculant eq_n . Donnez son coût. [Aide : Supposez d'abord qu'Alice et Bob terminent en même temps la transmission de leur partie. Puis adaptez le protocole pour qu'il fonctionne dans tous les cas.]*

Question 15. *En remarquant que le protocole de communication pour eq_n issu de la question 14 a un coût $\leq n$, expliquez la contradiction apparente avec le fait que $CC(eq_n) = n + 1$.*