

UE: APPLIED ALGORITHMS - 4TIN915U

(test – duration 1h30)

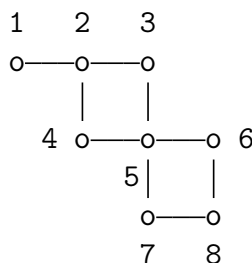
- *Answers can be done in English or in French* –
 - *Documents (course and personal notes) allowed* –
(the official lecture notes will be available)
-

L'algorithme glouton

Question 1. *Rappelez la définition du problème SET COVER dans le cas où les coûts sont unitaires ainsi que l'algorithme **Glouton** associé.*

Dans toute la suite on considérera uniquement de cas unitaire de SET COVER.

Question 2. *Donnez une solution pour VERTEX COVER qui a été produite par l'application de l'algorithme **Glouton** de la question 1 pour le graphe G_0 dessiné ci-dessous. (Vous pouvez dessiner la solution sur le graphe lui-même en indiquant dans quel ordre sont sélectionnés les sommets.)*



Question 3. *Donnez une solution pour VERTEX COVER pour le même graphe G_0 qui n'a pas pu être produite par l'algorithme **Glouton**. Justifiez.*

Question 4. *La solution construite à l'exercice 2 est-elle optimale ? Justifiez (si oui, pourquoi, sinon pourquoi).*

Soit $(B, \mathcal{F})$ une instance de SET COVER. Comme vu dans l'analyse de l'algorithme Glouton, on peut représenter $(B, \mathcal{F})$ par un graphe biparti, appelé *graphe d'incidence*, dont les sommets sont les éléments de $B \cup \mathcal{F}$, les arêtes connectant $b \in B$ à $S \in \mathcal{F}$ si et seulement si $b \in S$.

Question 5. *Donnez le graphe d'incidence pour l'instance (V_0, E_0) , où V_0 et E_0 sont respectivement les ensembles de sommets et d'arêtes du graphe G_0 de la question 2. (Vous pourrez*

nommer les sommets du graphe d'incidence correspondant à l'arête $\{i, j\}$ simplement par " ij ".)

La *fréquence* de $(B, \mathcal{F})$ est le plus petit entier f tel que, pour tout élément $b \in B$, le nombre d'ensembles $S \in \mathcal{F}$ contenant b est au plus f . Notez que la fréquence correspond au degré maximum des sommets de B dans le graphe d'incidence de $(B, \mathcal{F})$.

Question 6. Donnez la fréquence de l'instance (V_0, E_0) évoquée à la question 5. Justifiez.

Question 7. Donnez la fréquence d'une instance correspondant à VERTEX COVER pour un graphe $G = (V, E)$ quelconque. Justifiez.

La *densité* d'une instance $(B, \mathcal{F})$ est le plus grand entier d tel que, pour tout élément $b \in B$, le nombre d'ensembles $S \in \mathcal{F}$ contenant b est au moins d . Notez que la densité correspond au degré minimum des sommets de B dans le graphe d'incidence de $(B, \mathcal{F})$.

Question 8. Donnez les densités respectives de l'instance (V_0, E_0) et d'une instance $(B, \mathcal{F})$ correspondant à VERTEX COVER.

On dira que $(B, \mathcal{F})$ est *dense* s'il existe une constante $0 < \delta < 1$ telle que la densité de $(B, \mathcal{F})$ est au moins $\delta|\mathcal{F}|$. L'objectif de la suite est de montrer que les performances de l'algorithme Glouton sont significativement améliorées si l'instance $(B, \mathcal{F})$ est dense.

On considère donc l'algorithme Glouton qu'on applique à une instance $(B, \mathcal{F})$ dense de paramètre δ . On notera $n = |B|$ et $m = |\mathcal{F}|$. Notez bien que le nombre d'arêtes du graphe d'incidence de $(B, \mathcal{F})$ est au moins δnm . On notera R_i l'ensemble des éléments de B restant à couvrir après la i -ème étape, c'est-à-dire après avoir sélectionné i ensembles de $\mathcal{F}$ qu'on notera $S_1, \dots, S_i$. Ainsi, $R_0 = B$, et $R_1 = B \setminus S_1$.

Question 9. Montrez que $\mathcal{F}$ possède un ensemble S_1 couvrant au moins δn éléments de B . En déduire un majorant pour $|R_1|$. (Aide : Utilisez le graphe d'incidence.)

Question 10. Généralisez la question précédente en donnant un majorant pour $|R_i|$ en fonction de δ , n et i . Justifiez. (Aide : Commencez par $|R_2|$ en estimant le nombre d'arêtes du graphe d'incidence de la nouvelle instance $(R_1, \mathcal{F} \setminus \{S_1\})$.)

Soit i^* le nombre d'étapes pris par l'algorithme Glouton pour cette instance $(B, \mathcal{F})$.

Question 11. Pourquoi $|R_{i^*-1}| \geq 1$? En utilisant la question 10, en déduire un majorant sur le nombre d'étapes i^* en fonction de n et δ . (Vous pourrez admettre que si $(1-\varepsilon)^t \geq 1/q$, alors $t \leq \log_{1/(1-\varepsilon)} q$, ceci étant valable pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$, $t \geq 0$, et $q \geq 1$.)

Question 12. En déduire que la taille de la couverture optimale d'une instance $(B, \mathcal{F})$ dense est en $O(\log |B|)$.

Décomposition et mineur

Question 13. *Donnez une décomposition arborescente pour le graphe G_0 de la question 2 de sorte que l'arbre de décomposition soit un chemin contenant 3 sacs, chacun d'au plus 4 sommets. (Précisez le contenu des sacs avec les numéros de sommets de G_0 .)*

Question 14. *Raffiner la décomposition précédente de sorte que les sacs contiennent au plus 3 sommets. Expliquez pourquoi il s'agit bien d'une décomposition arborescente.*

Question 15. *Montrer que le graphe complet à 4 sommets, K_4 , est mineur d'une grille 3×3 à 9 sommets. (Dessinez la grille et indiquez les suppressions de sommets/arêtes et les contractions d'arêtes.)*

Question 16. *Montrer que l'arbre à $t+1$ sommets composé d'une racine de degré t et de t feuilles, $K_{1,t}$ ou étoile à t branches, est mineur d'une grille suffisamment grande. Précisez ses dimensions.*

Soit $\mathcal{D}_k$ l'ensemble des graphes possédant un ensemble dominant de taille au plus k .

Question 17. *Donnez l'exemple d'un graphe $G_k \notin \mathcal{D}_k$.*

Question 18. *Est-ce la famille des graphes $\mathcal{D}_k$ est close par mineur ? Justifiez.*

FIN.