

Answers can be done in English or in French. Documents (course and personal notes) allowed. The official lecture notes will be available.

L'algorithme glouton

Question 1. Rappelez la définition du problème SET COVER dans le cas où les coûts sont unitaires ainsi que l'algorithme Glouton associé.

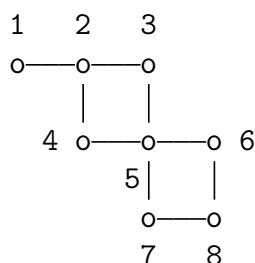
SOLUTION.

1) L'instance est une paire $(B, \mathcal{F})$ où $\mathcal{F}$ est un ensemble de sous-ensemble de B avec $\bigcup_{S \in \mathcal{F}} S = B$ (il ne peut avoir de solution sinon). Il s'agit de construire une couverture $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$ de cardinality minimum telle que $\bigcup_{S \in \mathcal{C}} S = B$. La variante avec des coûts associés aux ensembles de $\mathcal{F}$ consiste à minimiser non pas $|\mathcal{C}|$ mais $\sum_{S \in \mathcal{C}} \text{cout}(S)$.

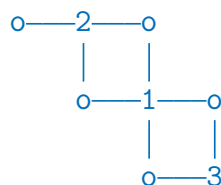
2) L'algorithme glouton consiste à choisir parmi $\mathcal{F}$ le sous-ensemble contenant le nombre maximum d'éléments de B non encore couverts (ou maximisant la ratio nombre d'éléments non encore couverts sur le coût de l'ensemble choisi).

Dans toute la suite on considérera uniquement de cas unitaire de SET COVER.

Question 2. Donnez une solution pour VERTEX COVER qui a été produite par l'application de l'algorithme Glouton de la question 1 pour le graphe G_0 dessiné ci-dessous. (Vous pouvez dessiner la solution sur le graphe lui-même en indiquant dans quel ordre sont sélectionnés les sommets.)

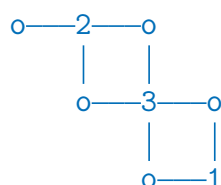


SOLUTION. L'algorithme Glouton choisit 5, 2, 8 dans cet ordre.



Question 3. Donnez une solution pour VERTEX COVER pour le même graphe G_0 qui n'a pas pu être produite par l'algorithme Glouton. Justifiez.

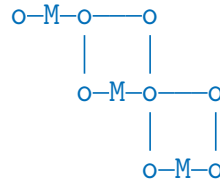
SOLUTION. L'ordre de sélection des sommets si dessous n'est pas compatible avec la stratégie gloutonne de l'algorithme : sélectionner le sommet couvrant le plus d'arêtes non encore couvertes.



En particulier, le premier sommet sélectionné doit être 5, le seul de degré le plus haut.

Question 4. La solution construite à l'exercice 2 est-elle optimale ? Justifiez (si oui, pourquoi, sinon pourquoi).

SOLUTION. La solution est optimale car le graphe possède un couplage de taille 3 (voir ci-dessous), ce qui implique que la couverture optimale est de taille au moins 3. L'algorithme étant correcte, la borne supérieure donnée par l'algorithme Glouton de 3 est donc optimale.

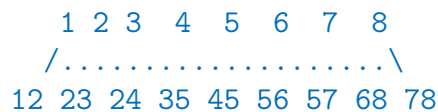


On pouvait également dire qu'avec deux sommets, on ne pouvait couvrir que $4 + 3 = 7$ arêtes, en considérant les deux sommets de plus hauts degré. Or G_0 possède $9 > 7$ arêtes. Deux sommets ne peuvent donc pas couvrir toutes les arêtes.

Soit $(B, \mathcal{F})$ une instance de SET COVER. Comme vu dans l'analyse de l'algorithme Glouton, on peut représenter $(B, \mathcal{F})$ par un graphe biparti, appelé *graphe d'incidence*, dont les sommets sont les éléments de $B \cup \mathcal{F}$, les arêtes connectant $b \in B$ à $S \in \mathcal{F}$ si et seulement si $b \in S$.

Question 5. Donnez le graphe d'incidence pour l'instance (V_0, E_0) , où V_0 et E_0 sont respectivement les ensembles de sommets et d'arêtes du graphe G_0 de la question 2. (Vous pourrez nommer les sommets du graphe d'incidence correspondant à l'arêtes $\{i, j\}$ simplement par " ij ".)

SOLUTION. Chaque arête est connectée à deux sommets comme ceci (arêtes non dessinées ci-dessous).



La fréquence de $(B, \mathcal{F})$ est le plus petit entier f tel que, pour tout élément $b \in B$, le nombre d'ensembles $S \in \mathcal{F}$ contenant b est au plus f . Notez que la fréquence correspond au degré maximum des sommets de B dans le graphe d'incidence de $(B, \mathcal{F})$.

Question 6. Donnez la fréquence de l'instance (V_0, E_0) évoquée à la question 5. Justifiez.

SOLUTION. C'est 4, car un sommet de V_0 est incident à au plus 4 arêtes de E_0 , correspondant au degré maximum de G_0 .

Question 7. Donnez la fréquence d'une instance correspondant à VERTEX COVER pour un graphe $G = (V, E)$ quelconque. Justifiez.

SOLUTION. L'instance correspondant à VERTEX COVER est $(E, \mathcal{F})$ où les ensembles $S_i \in \mathcal{F}$ sont les ensembles d'arêtes incidentes au sommet u , pour chaque $u \in V$. Il suit que chaque arête $\{u, v\} \in E$ appartient à exactement deux ensembles de $\mathcal{F}$. Dit autrement, le degré maximum des éléments de B (ici E donc) dans le graphe d'incidence est deux. Notez bien que cela n'a rien à voir avec le degré maximum des sommets de G .

La densité d'une instance $(B, \mathcal{F})$ est le plus grand entier d tel que, pour tout élément $b \in B$, le nombre d'ensembles $S \in \mathcal{F}$ contenant b est au moins d . Notez que la densité correspond au degré minimum des sommets de B dans le graphe d'incidence de $(B, \mathcal{F})$.

Question 8. Donnez les densités respectives de l'instance (V_0, E_0) et d'une instance $(B, \mathcal{F})$ correspondant à VERTEX COVER.

SOLUTION.

1) Pour (V_0, E_0) , la densité est seulement de 1, car le sommet $1 \in V_0$ n'est présent que dans une seule arête de $E_0 : \{1, 2\}$.

2) Pour une instance de VERTEX COVER $(B, \mathcal{F})$, la densité est deux comme la fréquence, toute arête étant toujours dans exactement deux ensembles de $\mathcal{F}$.

On dira que $(B, \mathcal{F})$ est *dense* s'il existe une constante $0 < \delta < 1$ telle que la densité de $(B, \mathcal{F})$ est au moins $\delta|\mathcal{F}|$. L'objectif de la suite est de montrer que les performances de l'algorithme Glouton sont significativement améliorées si l'instance $(B, \mathcal{F})$ est dense.

On considère donc l'algorithme Glouton qu'on applique à une instance $(B, \mathcal{F})$ dense de paramètre δ . On notera $n = |B|$ et $m = |\mathcal{F}|$. Notez bien que le nombre d'arêtes du graphe d'incidence de $(B, \mathcal{F})$ est au moins δnm . On notera R_i l'ensemble des éléments de B restant à couvrir après la i -ème étape, c'est-à-dire après avoir sélectionné i ensembles de $\mathcal{F}$ qu'on notera $S_1, \dots, S_i$. Ainsi, $R_0 = B$, et $R_1 = B \setminus S_1$.

Question 9. Montrez que $\mathcal{F}$ possède un ensemble S_1 couvrant au moins δn éléments de B . En déduire un majorant pour $|R_1|$. (Aide : Utilisez le graphe d'incidence.)

SOLUTION. Il y a m sommets pour $\mathcal{F}$, donc l'un doit être de degré supérieur ou égale à la moyenne des arêtes incidentes aux sommets de $\mathcal{F}$, soit $\delta nm/m = \delta n$. Le premier ensemble de $S_1 \in \mathcal{F}$ choisi, celui qui en couvre le plus, couvre donc au moins δn éléments de B . Il en reste donc $|R_1| \leq n - |S_1| \leq n - \delta n = (1 - \delta)n$.

Question 10. Généralisez la question précédente en donnant un majorant pour $|R_i|$ en fonction de δ , n et i . Justifiez. (Aide : Commencez par $|R_2|$ en estimant le nombre d'arêtes du graphe d'incidence de la nouvelle instance $(R_1, \mathcal{F} \setminus \{S_1\})$.)

SOLUTION. Montrons d'abord que l'instance $(R_1, \mathcal{F} \setminus \{S_1\})$ est de densité δ (ou plus). Appelons G le graphe d'incidence de $(B, \mathcal{F})$, et $G' = G \setminus \{S_1\}$ celui de $(R_1, \mathcal{F} \setminus \{S_1\})$. Pour cela il faut montrer que $\mathcal{F} \setminus \{S_1\}$ possède un sommet de degré au moins $\delta \cdot |\mathcal{F} \setminus \{S_1\}| = \delta(m - 1)$.

Le degré de S_1 (dans G) est au plus $|B| - 1 = n - 1$, car sinon R_2 serait déjà vide. Il suit que G' possède au moins $|E(G)| - (n - 1)$ arêtes, ce qui est $\geq \delta nm - (n - 1) > \delta(n - 1)m - (n - 1)$. Il existe donc dans $\mathcal{F} \setminus \{S_1\}$ un sommet de degré au moins $|E(G')|/(n - 1) \geq \delta m > \delta(m - 1)$. Ce que l'on voulait démontrer.

On est donc dans les conditions de la question où $(B, \mathcal{F})$ est remplacée par $(R_1, \mathcal{F} \setminus \{S_1\})$ qui est densité aussi δ . Il suit que $|R_2| \leq (1 - \delta) \cdot |R_1| \leq (1 - \delta)^2 n$. Plus généralement, tant que R_i n'est pas vide, l'instance $(R_i, \mathcal{F} \setminus \{S_1, \dots, S_{i-1}\})$ est de densité δ , et donc $|R_i| \leq (1 - \delta) \cdot |R_{i-1}| \leq (1 - \delta)^i n$.

Soit i^* le nombre d'étapes pris par l'algorithme Glouton pour cette instance $(B, \mathcal{F})$.

Question 11. Pourquoi $|R_{i^*-1}| \geq 1$? En utilisant la question 10, en déduire un majorant sur le nombre d'étapes i^* en fonction de n et δ . (Vous pourrez admettre que si $(1 - \epsilon)^t \geq 1/q$, alors $t \leq \log_{1/(1-\epsilon)} q$, ceci étant valable pour tout $\epsilon \in]0, 1[$, $t \geq 0$, et $q \geq 1$.)

SOLUTION. Sinon, l'algorithme serait fini. Par la question 10, on a $|R_{i^*-1}| \leq (1 - \delta)^{i^*-1} n$ et $|R_{i^*-1}| \geq 1$. Donc $(1 - \delta)^{i^*-1} n \geq 1$ ou encore $(1 - \delta)^{i^*-1} \geq 1/n$. En appliquant la formule, on en déduit que $i^* \leq 1 + \log_{1/(1-\delta)} n$.

Question 12. En déduire que la taille de la couverture optimale d'une instance $(B, \mathcal{F})$ dense est en $O(\log |B|)$.

SOLUTION. D'après la question précédente, on en déduit que $i^* = O(\log n) = O(\log |B|)$ puisque δ est une constante. Or la taille de la couverture renvoyée par l'algorithme Glouton est i^* , un majorant de la couverture optimale.

Décomposition et mineur

Question 13. *Donnez une décomposition arborescente pour le graphe G_0 de la question 2 de sorte que l'arbre de décomposition soit un chemin contenant 3 sacs, chacun d'au plus 4 sommets. (Précisez le contenu des sacs avec les numéros de sommets de G_0 .)*

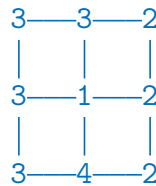
SOLUTION. $P = \{1, 2\} - \{2, 3, 4, 5\} - \{5, 6, 7, 8\}$.

Question 14. *Raffiner la décomposition précédente de sorte que les sacs contiennent au plus 3 sommets. Expliquez pourquoi il s'agit bien d'une décomposition arborescente.*

SOLUTION. $P = \{1, 2\} - \{2, 3, 4\} - \{3, 4, 5\} - \{5, 6, 7\} - \{6, 7, 8\}$. On vérifie que chaque les sacs couvrent tous les sommets et toutes les arêtes, et que chaque sommets appartient (dans le cas d'un chemin) des sacs consécutifs du chemin.

Question 15. *Montrer que le graphe complet à 4 sommets, K_4 , est mineur d'une grille 3×3 à 9 sommets. (Dessinez la grille et indiquez les suppressions de sommets/arêtes et les contractions d'arêtes.)*

SOLUTION.



Question 16. *Montrer que l'arbre à $t + 1$ sommets composé d'une racine de degré t et de t feuilles, $K_{1,t}$ ou étoile à t branches, est mineur d'une grille suffisamment grande. Précisez ses dimensions.*

SOLUTION. Une grille $2 \times t$ suffit.

Soit $\mathcal{D}_k$ l'ensemble des graphes possédant un ensemble dominant de taille au plus k .

Question 17. *Donnez l'exemple d'un graphe $G_k \notin \mathcal{D}_k$.*

SOLUTION. Un stable de $k + 1$ sommets.

Question 18. *Est-ce la famille des graphes $\mathcal{D}_k$ est close par mineur ? Justifiez.*

SOLUTION. Ce n'est pas clos par mineur car une clique de taille $k + 1$ est dans $\mathcal{D}_1$, mais elle contient comme sous-graphe (et donc comme mineur) un stable de $k + 1$ sommets qui n'est pas dans $\mathcal{D}_k$.