

Answers can be done in English or in French. Documents (course and personal notes) allowed.

Course Questions

Question 1. Give at least one advantage and one drawback for algorithms based on dynamic programming.

SOLUTION. Avantages : ils peuvent permettre de résoudre des problèmes compliqués de manière efficace. Inconvénient : ils peuvent poser des problèmes de mémoire.

Question 2. Same question for algorithms for graphs of small tree-width.

SOLUTION. Avantages : ils peuvent permettre de résoudre des problèmes NP-complet de manière efficace, c'est-à-dire en temps polynomiale. Inconvénient : ils nécessitent le calcul de la tree-decomposition.

Consider now the cycle graph C_n where its vertices are $v_0, v_1, \dots, v_{n-1}$ and its edges are the pairs $\{v_i, v_{(i+1) \bmod n}\}$.

Question 3. Give a tree-decomposition of width 2 for C_5 . (Give the tree, the bags and their contents, and check that all properties hold.)

SOLUTION.

$$\{0, 1, 2\} - \{0, 2, 3\} - \{0, 3, 4\}$$

Chaque v_i est bien dans au plus deux bags consécutifs.

Question 4. Generalize Question 3 by describing a tree-decomposition of width 2 for C_n .

SOLUTION.

$$\{0, 1, 2\} - \dots - \{0, i, i+1\} - \dots - \{0, n-2, n-1\}$$

Chaque v_i est bien dans au plus deux bags consécutifs.

Covering Points by Ellipsis

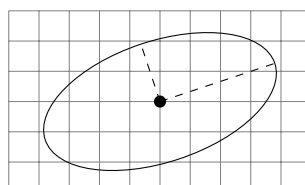
We consider the decision problem ELLIPSE COVER defined as follows :

Instance : A set of $P \subset \mathbb{R}^2$ of n points in the plane, and $k \in \mathbb{N}$.

Question : Does P has an ellipse cover of size k ? i.e., are there k ellipsis in the plane such that every point of P belongs to at least one of these ellipsis ?

We will also consider the optimization variant, called MINIMUM ELLIPSE COVER, that asks to find the minimum k such that P has an ellipse cover of size k .

Recall that an *ellipse* is a close curve in the plane that looks like to a circle that has been flattened by two antipodal points. It can be defined by a center c (like a circle), two orthogonal radii r_x, r_y (for a circle $r_x = r_y$) and a slope α indicating by how much the curve is rotated ($\alpha = 0$ for a circle). See hereafter for such an example.



For the ellipse drawn above, the center c is the black middle point, $r_x = 4$, $r_y = 2$, and $\alpha = \arctan(1/3) \approx 18.4^\circ$. We can check that the set of all the points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ belonging to an ellipse satisfies a quadratic equation of the form $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$, where the real coefficients a, b, c, e, d, f depend on the parameters c, r_x, r_y, α defining the ellipse.

A set of points is said in *general position* if it has no three points aligned. It is well-known that any three points in general position determines a unique circle. This is different for an ellipse.

Question 5. Construct four points in general position such that no ellipse can contain these four points. Explain why?

SOLUTION. Les points doivent être en positions convexes, car toute ellipse est convexe. Donc mettre un 4e point au centre d'un triangle rend impossible l'existence d'une telle ellipse.

Question 6. Explain why four points in general position are not sufficient to uniquely determine an ellipse, whereas an ellipse can contain these same four points.

SOLUTION. On peut prendre deux ellipses s'intersectant en 4 points. Et bien pour ces 4 points il y a donc deux ellipses possibles.

In the remaining we will assume that five points are always sufficient to uniquely determine an ellipse. Moreover, you can assume to be given a routine $\text{Check}(Q)$ that, given a set Q of at most five points, returns the six coefficients of the quadratic equation of an ellipse passing by all the points of Q (if any), or that returns $\perp$ if no such ellipse exists.

Question 7. Describe an algorithm for solving ELLIPSE COVER for $k = 1$. What is its time complexity?

SOLUTION. Prendre $\min\{n, 5\}$ points arbitraire de P et les mettre dans un ensemble Q . Puis appliquer $\text{Check}(Q)$, qui prend un temps constant puisque l'entrée est de taille constante. S'il n'y a pas d'ellipse, répondre FAUX. Sinon, vérifier en temps $O(n)$ que tous les points de P sont bien sur l'unique ellipse de $\text{Check}(Q)$ et répondre VRAI ou FAUX selon le résultat de ce test.

Question 8. Give a reduction rule showing that ELLIPSE COVER, whenever k is a parameter, admits a kernel. (A complete justification is required here! You have to show that your reduction is valid and is polynomial (give its complexity), and you have to express the size of the kernel.)

SOLUTION. Prendre une ellipse contenant plus de $4k$ points. La remarque est que deux ellipses s'intersectent par au plus 4 points. Donc si on ne prend pas l'ellipse couvrant S avec $|S| > 4k$ points alors il en faudra au moins $k + 1$ autres ellipses pour couvrir S . Il y a que $\binom{n}{5} = O(n^5)$ ellipses possibles à tester, ce qui est polynomial et prend un temps en $O(n^6)$ pour tester toutes les ellipses sur P . Et avec k ellipses couvrantes chacune au plus $4k$ points, on ne couvre que $4k^2$ points au maximum. Donc le noyau est de taille $4k^2$.

Question 9. Explain to which general problem seen in the course MINIMUM ELLIPSE COVER is a particular case. In particular, what are the sets B , $\mathcal{F}$, and their size $|B|$, $|\mathcal{F}|$?

SOLUTION. Il s'agit de SET COVER avec $B = P$ et $\mathcal{F}$ est l'ensemble des ellipses sur 5 points de P , ce qui fait au plus n^5 ellipses.

Question 10. Explain how to approximate MINIMUM ELLIPSE COVER in polynomial time. What is the approximation factor?

SOLUTION. En appliquant GreedySetCover($B, \mathcal{F}$), le facteur d'approximation est $H(|B|) \leq 1 + \ln(n)$. La complexité en temps de cet algorithme est polynomiale, car B et $\mathcal{F}$ sont de taille polynomiale en n .

Question 11. By combining answers of Question 8 and Question 10, describe an $O(\log k^*)$ -approximation for MINIMUM ELLIPSE COVER, where $k^* < n$ is the optimal size of the cover.

SOLUTION. On cherche le k optimal, noté k^* en se servant du noyau. On commence donc par $k = 1$. On réduit le problème à un noyau de taille $4k^2$. Si on échoue, $k^* > k$: on augmente k et on recommence. Si on passe le test, on applique l'algorithme glouton sur le noyau P' , sous-ensemble de P avec $k' \leq k$ le nouveau paramètre. Il faut prendre $B = P'$ et $\mathcal{F}$ comme l'ensemble des ellipses sur P' . La taille de ces

deux ensembles est polynomiale. Soit $\mathcal{C}$ la couverture renvoyée par l'algorithme gouton pour P' . Si $|P'|$ possédait une couverture optimale de taille k' , alors on aurait

$$|\mathcal{C}| \leq k' \cdot H(|P'|) \leq k \cdot (1 + \ln(4k^2)) = f(k) .$$

Donc si $|\mathcal{C}| > f(k)$, alors $k^* > k$: on augmente k et on recommence. Sinon, on a donc trouvé une couverture $\mathcal{C}$ telle que $k^* \leq |\mathcal{C}| \leq f(k^*) = O(k^* \log(k^*))$ ce qui est bien une $O(\log(k^*))$ -approximation.

END.