
Documents (cours et notes personnelles) autorisés.

Dans toute la suite, la grille $p \times q$ représente le graphe classique à pq sommets répartis sur p lignes chacune de q sommets, les arêtes étant horizontales ou verticales. Par exemple, la grille 2×2 est un cycle de longueur 4, la grille $1 \times n$ est un chemin à n sommets, la grille 8×8 un échiquier.

Couverture par sommets

On considère un des algorithmes d'approximation de COUVERTURE PAR SOMMETS vu en cours appliqué à un graphe G et qui consiste à :

1. Calculer un arbre couvrant T selon un parcours DFS ;
2. Renvoyer l'ensemble S des sommets internes de T .

Question 1. *Rappelez le facteur d'approximation de cet algorithme et proposez une instance critique.*

SOLUTION. Il s'agit d'une 2-approximation. Un chemin de $2k + 1$ sommets. La taille optimale est k . En choisissant une extrémité comme racine du parcours, on va obtenir $2k$ sommets internes et une seule feuille, soit le double de la taille optimale.

On considère une variante de l'algorithme précédent. La première étape est identique. Pour la deuxième, plutôt que de renvoyer S , on renvoie un sous-ensemble $C \subseteq S$ calculé en appliquant l'algorithme glouton vu en cours pour résoudre COUVERTURE PAR ENSEMBLES.

Question 2. *Détaillez l'instance précise de COUVERTURE PAR ENSEMBLES qui va être utilisée ici, c'est-à-dire donnez l'ensemble B et la famille $\mathcal{F}$.*

SOLUTION. Il faut choisir $B = V(G)$, et $\mathcal{F} = \{E_u : u \in S\}$ où E_u est l'ensemble des arêtes incidentes à u dans G . Notez qu'en choisissant $\mathcal{F} = \{E_u : u \in V(G)\}$, la solution renvoyée par l'algorithme glouton ne sera pas forcément un sous-ensemble de S .

Question 3. *Appliquez ce nouvel algorithme à une grille $2 \times n$ en donnant la taille de la couverture obtenue. Justifiez votre réponse en expliquant le choix du DFS et la construction de l'ensemble C .*

SOLUTION. En prenant comme racine un sommet de degré 2 et un DFS qui est un chemin, on trouve un ensemble C de taille au plus n .

Question 4. *Donnez, en fonction de n , la taille minimum d'une COUVERTURE PAR SOMMETS pour la grille $2 \times n$. Justifiez pourquoi cette valeur est optimale.*

SOLUTION. C'est au plus n d'après la question précédente. Et c'est au moins n car la grille $2 \times n$ possède un couplage parfait de taille n composé des arêtes des n colonnes.

Question 5. *Donnez, en fonction de n , la taille minimum d'une COUVERTURE PAR SOMMETS pour une clique à n . Justifiez pourquoi cette valeur est optimale.*

SOLUTION. La taille minimum est $n - 1$ car l'ensemble indépendant maximum d'une clique est de taille 1. Or, comme vu en cours, toute couverture par sommets est le complémentaire d'un ensemble indépendant.

Question 6. *Pour l'algorithme présenté en premier et la variante proposée, donnez le facteur d'approximation si G est une clique à n sommets.*

SOLUTION. Pour l'algorithme classique, l'arbre couvrant va être un chemin, et donc $n - 1$ sommets seront renvoyés. C'est optimal d'après la question précédente. Donc le facteur d'approximation est de 1. Il sera aussi de 1 pour la variante qui ne peut donner qu'un sous-ensemble de l'algorithme classique et donc un facteur d'approximation de 1 également puisque 1 est le plus petit facteur d'approximation possible.

Question 7. *Donnez un majorant (le plus petit possible) sur le facteur d'approximation de la variante proposée. Justifiez.*

SOLUTION. Au plus deux, ne peut être pire que de prendre tous les sommets internes. Car, sauf si $P=NP$, aucun algorithme polynomial ne peut faire mieux que deux, ce qui est le cas de cette variante.

On pouvait également trouver une instance critique (ou presque), en considérant par exemple un graphe avec $2k$ sommets composé d'un chemin P de $2k$ sommets dont une extrémité, disons u , est connectée à tous les autres sommets de P . Si l'arbre DFS T part de l'extrémité qui n'est pas u , et le parcourt entièrement avant de terminer sur la feuille u , alors u ne sera jamais considérée par la 2e partie de l'algorithme. Or, pour couvrir les arêtes entre u et P , sans utiliser u , il est nécessaire de sélectionner tous les voisins de u , soit $2k - 1$ sommets, soit précisément tous les sommets internes de T . La solution optimale est de taille k , consistant à choisir u , mais aussi un sommet sur deux de $P \setminus \{u\}$, soit $k - 1$ sommets, pour couvrir les arêtes de $P \setminus \{u\}$. Cela fait un facteur d'approximation de $2 - 1/k = 2 - 2/n = 2 - o(1)$ pour un graphe à n sommets.

Parasols

On considère un graphe G qui est une grille $p \times q$ ayant un certain ensemble W de sommets marqués. Pour des raisons techniques, on supposera que p et q sont plus grands que 5. On souhaite trouver un ensemble $\mathcal{C}$ de sous-graphes de G tels que :

1. Chaque sous-graphe $H \in \mathcal{C}$ est une grille carrée 3×3 ou 5×5 .
2. Pour tout sommet $u \in W$, il existe une grille $H \in \mathcal{C}$ contenant u .

On appellera ce problème celui du PARASOL, en imaginant qu'il s'agit de positionner des parasols (les sous-graphes H) sur une plage rectangulaire (la grille G) afin de protéger de l'ensoleillement les clients d'une plage privée (l'ensemble W). L'objectif est de trouver un ensemble $\mathcal{C}$ de cardinalité la plus petite possible. Notez bien que rien n'empêche les parasols de se chevaucher.

Question 8. *Ce problème se réduit à un problème vu dans le chapitre 2. Expliquez lequel et quelle est la réduction.*

SOLUTION. C'est ENSEMBLE DOMINANT ANNOTÉ de taille minimum dans le graphe G' obtenu à partir de G et en connectant chaque sommet à tous ceux de la grille 5×5 placé autour de lui. L'ensemble $V(G) \setminus W$ est l'ensemble des sommets marqués (déjà dominés).

Question 9. *Donnez un algorithme naïf permettant de résoudre PARASOL de cardinalité k . Donnez et justifiez sa complexité.*

SOLUTION. On peut appliquer un algorithme Brute-force de complexité $O((pq)^k \cdot k|W|) = O(n^{k+2})$, où $n = pq$, consistant à tester toutes les positions de k parasols dans G' et de vérifier les voisinages des sommets de W . Il y a $\binom{pq}{k}$ ensembles de k positions à prendre pris dans $\{1, \dots, pq\}$. La vérification peut se faire en temps $O(k|W|)$.

Question 10. *Connaissez-vous un algorithme permettant de résoudre PARASOL de cardinalité k qui soit FPT en k et en $|W|$? Rappelez son principe et donnez sa complexité.*

SOLUTION. Oui, l'étape 2a de l'algorithme Progress. Comme vu en cours, cette étape peut se faire en $O(|W|(n + m) + |W|2^{k|W|})$ où $m = O(pq)$, $n = O(pq)$ et W est un ensemble de sommets à dominer. L'idée de l'étape 2a est d'établir des profils d'appartenance de chaque sommet du graphe par rapports aux "voisinages" des sommets de W , et d'en choisir un par profile (représentant). Par "voisinage" on entend

soit la distance 1 dans le graphe G' ou alors la zone du graphe de G où un sommet donné de W peut être couvert par un des parasols. Le nombre de représentant est au plus $2^{|W|}$, et il suffit de rechercher un ensemble dominant de taille k (par brute-force) parmi ces profiles.

On considère maintenant une variante du problème PARASOL, qu'on appellera PARASOL-PAYANT. La différence est que chaque grille H choisie dans $\mathcal{C}$ est de dimension 2×2 ou 3×3 , et possède un coût. Plus précisément $\text{coût}(H)$ est le nombre de sommets du coté de la grille H , soit 2 ou 3. Il s'agit maintenant de calculer un ensemble $\mathcal{C}$ de coût total le plus petit possible.

Question 11. À quel problème vu en cours peut-on réduire PARASOL-PAYANT de coût minimum ? Justifiez.

SOLUTION. Le problème se réduit à COUVERTURE PAR ENSEMBLES de coût minimum, où $B = W$ et $\mathcal{F}$ est l'ensemble de toutes sous-grilles H positionnées à chaque sommet possible de la grille.

Question 12. Appliquez un algorithme d'approximation pour PARASOL-PAYANT de coût minimum pour la grille 6×9 représentée ci-après où les sommets de W sont symbolisés par des X. Donnez la solution renvoyée et son coût. (Éventuellement recopier la grille et dessiner les parasols).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9			
1	.	—	.	X	—	.	—	.	X	X	X	1
2	.	—	X	X	—	.	—	.	—	.	—	2
3	.	—	.	.	X	—	.	—	.	—	.	3
4	.	—	.	.	.	X	—	.	X	—	.	4
5	.	—	.	X	X	—	.	—	.	—	X	5
6	.	—	X	—	.	—	.	X	—	.	X	6
	1	2	3	4	5	6	7	8	9			

SOLUTION. Il fait choisir de manière itérative les points de la grille afin de maximiser le ratio $|V(H) \cap R|/\text{coût}(H)$ parmi les grilles H de taille 2×2 ou 3×3 , où R est l'ensemble des sommets de W restant à couvrir. Au départ $R = W$.

En choisissant au départ le point (2, 1) et une grille 2×2 , on peut couvrir 3 sommets de W avec un ratio est de $3/2 = 1.5$. On peut couvrir 4 sommets de W en choisissant les points (3, 2) ou (4, 4) et une grille 3×3 avec un ratio de seulement $4/3 \approx 1.33$. Puis, en choisissant le point (4, 4) et une grille 3×3 on couvre 4 nouveaux sommets de W avec un ratio $4/3 = 1.33$. Puis, en choisissant le point (5, 8) et une grille 3×3 on couvre 3 nouveaux sommets de W avec un ratio $3/3 = 1$. Puis, en choisissant le point (8, 2) et une grille 3×3 on couvre 3 nouveaux sommets de W avec un ratio $3/3 = 1$. Enfin, en choisissant (2, 6) et (6, 6) avec une grille 2×2 , le ratio est de $1/2 = 0.5$.

Au final, le coût de la couverture ainsi calculée est de : $2 + 3 + 3 + 3 + 2 + 2 = 15$. Ci-dessous le choix des positions dans l'ordre alphabétique, les minuscules correspondant à des grilles 2×2 et les majuscules à des grilles 3×3 .

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	.	—	a—X—	.	.	.	.	X—X—X	1	
2	.	—	X—X—	.	.	.	.	D—	2	
3	.	.	.	—	X—	.	.	.	3	
4	.	.	.	—	B—X—	.	X—	.	4	
5	.	.	—	X—X—	.	.	.	—	C—X	5
6	.	—	X—e—	.	f—X—	.	.	—	X	6
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	

Question 13. *Donnez le facteur d'approximation théorique de cet algorithme pour une grille $p \times q$ (et pas seulement dans l'exemple ci-dessus) pour le problème PARASOL-PAYANT.*

SOLUTION. Le facteur d'approximation théorique est au plus $h(9) = 1 + 1/2 + 1/3 + \dots + 1/9 \approx 2.82$, car chaque sous-grille H de toute couverture C couvre au plus 9 sommets de l'ensemble $B = W$ (au plus 3×3).

Question 14. *Même question en supposant que W est un ensemble indépendant de G .*

SOLUTION. Dans ce cas, le facteur d'approximation est meilleur car chaque sous-grille H ne peut couvrir qu'au plus 5 sommets de W , soit la taille d'un ensemble indépendant maximum dans une grille 3×3 . Il vaut donc $h(5) \approx 2.28$.

SOLUTION. Au plus $h(5)$, car chaque H de toute couverture C couvre au plus 5 indépendents, H étant de taille 3×3 au plus.

Question 15. *Dans l'exemple de la grille 6×9 et l'ensemble W ci-dessus, pouvez-vous trouver une meilleure solution ? Justifiez.*

SOLUTION. On pouvait faire juste un peu mieux avec les choix suivants :

	1	2	3	4	5	6	7	8	9					
1	.	—	—	X—	.	—	—	—	X—	X—	X	1		
2	.	—	X—	A—	.	—	—	—	—	—	D—	2		
3	.	—	—	—	X—	.	—	—	—	—	—	3		
4	.	—	—	—	—	X—	.	—	X—	.	—	4		
5	.	—	—	X—	X—	.	—	C—	.	—	E—	X	5	
6	.	—	X—	B—	.	—	—	X—	.	—	—	—	X	6
	1	2	3	4	5	6	7	8	9					

Le coût de cette solution étant de $3 + 3 + 3 + 3 + 2 = 14$.