

## UE: ALGORITHMIQUE APPLIQUÉE - 4TIN903U

(test – durée 1h)

– *Documents (cours et notes personnelles) autorisés* –

---

Le sujet est principalement dédié à l'étude du problème COUVERTURE PAR ARÊTES de taille minimum. Il s'agit de couvrir tous les sommets d'un graphe, sauf les sommets isolés, avec le nombre minimum d'arêtes. Plus formellement, l'entrée du problème est un graphe  $G$  et la sortie un sous-ensemble d'arêtes  $E' \subseteq E(G)$  de cardinalité minimum tel que pour tout  $u \in V(G)$  tel que  $\deg(u) > 0$ , il existe une arête  $\{u, v\} \in E'$ .

### Grille $3 \times 3$

La « grille  $3 \times 3$  » est le graphe ayant neuf sommets répartis sur les intersections de trois lignes et trois colonnes d'une grille carrée 2D, les arêtes connectant les sommets immédiatement voisins sur la ligne ou la colonne de chaque sommet.

**Question 1.** *Donnez une solution pour le problème COUVERTURE PAR ARÊTES de taille minimum appliqué à une grille  $3 \times 3$ . Vous pouvez dessiner votre solution en indiquant clairement les arêtes sélectionnées.*

**Question 2.** *Donnez une solution pour le problème COUVERTURE PAR SOMMETS de taille minimum appliqué à une grille  $3 \times 3$ . Dessiner votre solution.*

**Question 3.** *Donnez une solution pour le problème ENSEMBLE DOMINANT de taille minimum appliqué à une grille  $3 \times 3$ . Dessiner votre solution.*

### Algorithme A1

Pour tenter de résoudre le problème COUVERTURE PAR ARÊTES on propose l'algorithme A1 suivant : (1) construire une forêt couvrante du graphe ; et (2) renvoyer toutes les arêtes de cette forêt.

**Question 4.** *Donnez un exemple où l'algorithme A1 ne donne pas la taille optimale. (NB : On ne demande pas une instance critique.)*

**Question 5.** *Quelle est la complexité de l'algorithme A1.*

**Question 6.** *Montrer que l'algorithme A1 est un algorithme d'approximation en précisant son facteur d'approximation.*

**Question 7.** *Trouvez une instance critique pour l'algorithme A1.*

**Question 8.** *Expliquez pourquoi le problème COUVERTURE PAR ARÊTES est un cas particulier*

du problème générique COUVERTURE PAR ENSEMBLES.

**Question 9.** Proposez ainsi un autre algorithme d'approximation tout en précisant le facteur d'approximation.

## Algorithme A2

On propose un nouvel algorithme, noté A2 : (1) construire une forêt couvrante ; (2) renvoyer une solution optimale pour cette forêt.

**Question 10.** En supposant connu un algorithme de complexité polynomiale donnant la solution optimale pour une forêt, montrez qu'A2 est un algorithme d'approximation en précisant son facteur d'approximation.

**Question 11.** Donnez une instance critique pour l'algorithme A2.

## Algorithme A3

On propose un autre algorithme, noté A3 : (1) construire un couplage maximal ; (2) pour chaque sommet non couvert par le couplage choisir une de ses arêtes incidentes ; et (3) renvoyer les arêtes sélectionnées à l'étape (1) et (2).

**Question 12.** Quelle est la propriété de l'ensemble des sommets non couverts après application de l'étape (1) ?

**Question 13.** Expliquez la différence entre un couplage maximal et maximum.

**Question 14.** Montrez que l'algorithme A3 peut ne pas trouver la taille optimale. (Aide : Considérez le cas d'un graphe possédant un couplage parfait.)

## Algorithme A4

On propose une variante de l'algorithme A3, variante notée A4, consistant pour l'étape (1) à prendre un couplage maximum plutôt que maximal, les étapes (2) et (3) restant identiques.

**Question 15.** Montrez que l'algorithme A4 trouve la taille optimale si le graphe possède un couplage parfait.

**Question 16.** Montrez que si le graphe n'a pas de sommet isolé et contient un ensemble indépendant  $I$ , alors la taille optimale d'une COUVERTURE PAR ARÊTES est au moins  $|I|$ .

**Question 17.** Montrez que l'algorithme A4 donne toujours la solution de taille optimale.

**FIN.**