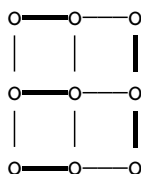

Documents (cours et notes personnelles) autorisés.

Le sujet est principalement dédié à l'étude du problème COUVERTURE PAR ARÊTES de taille minimum. Il s'agit de couvrir tous les sommets d'un graphe, sauf les sommets isolés, avec le nombre minimum d'arêtes. Plus formellement, l'entrée du problème est un graphe G et la sortie un sous-ensemble d'arêtes $E' \subseteq E(G)$ de cardinalité minimum tel que pour tout $u \in V(G)$ tel que $\deg(u) > 0$, il existe une arête $\{u, v\} \in E'$.

Grille 3×3

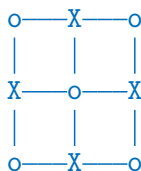
La « grille 3 × 3 » est le graphe ayant neuf sommets répartis sur les intersections de trois lignes et trois colonnes d'une grille carrée 2D, les arêtes connectant les sommets immédiatement voisins sur la ligne ou la colonne de chaque sommet.

Question 1. *Donnez une solution pour le problème COUVERTURE PAR ARÊTES de taille minimum appliqué à une grille 3 × 3. Vous pouvez dessiner votre solution en indiquant clairement les arêtes sélectionnées.*



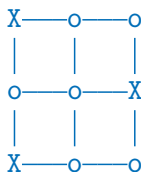
Question 2. *Donnez une solution pour le problème COUVERTURE PAR SOMMETS de taille minimum appliqué à une grille 3 × 3. Dessiner votre solution.*

SOLUTION.



Question 3. *Donnez une solution pour le problème ENSEMBLE DOMINANT de taille minimum appliqué à une grille 3 × 3. Dessiner votre solution.*

SOLUTION.



Algorithme A1

Pour tenter de résoudre le problème COUVERTURE PAR ARÊTES on propose l'algorithme A1 suivant : (1) construire une forêt couvrante du graphe ; et (2) renvoyer toutes les arêtes de cette forêt.

Question 4. *Donnez un exemple où l'algorithme A1 ne donne pas la taille optimale. (NB : On ne demande pas une instance critique.)*

SOLUTION. Un chemin à trois sommets.

Question 5. *Quelle est la complexité de l'algorithme A1.*

SOLUTION. La complexité est linéaire, en $O(n + m)$.

Question 6. *Montrer que l'algorithme A1 est un algorithme d'approximation en précisant son facteur d'approximation.*

SOLUTION. L'algorithme est valide, car par définition d'une forêt couvrante, tous les sommets sont bel et bien couverts.

Il est clair qu'il faut toujours au moins $n/2$ arêtes pour couvrir tous les sommets, puisqu'une seule arête ne peut couvrir qu'au plus deux sommets. L'algorithme renvoie au plus $n - 1$ arêtes. Le facteur d'approximation est donc $(n - 1)/(n/2) = 2 - 2/n < 2$.

Comme on l'a vu, l'algorithme est polynomial. On en conclut que A1 est une 2-approximation, mais aussi une $(2 - 2/n)$ -approximation.

Question 7. *Trouvez une instance critique pour l'algorithme A1.*

SOLUTION. Un chemin avec $n = 2k$ sommets : k arêtes suffisent alors qu'A1 renverra les $2k - 1$ arêtes du chemin, soit un ratio de $2 - 1/k = 2 - 2/n$.

Question 8. *Expliquez pourquoi le problème COUVERTURE PAR ARÊTES est un cas particulier du problème générique COUVERTURE PAR ENSEMBLES.*

SOLUTION. Il s'agit de couvrir les sommets d'un graphe, sauf ses sommets isolés, à l'aide de paires de sommets correspondant à des arêtes du graphe. C'est donc une instance $(B, \mathcal{F})$ de COUVERTURE PAR ENSEMBLES avec $B = V(G) \setminus \{\text{sommets isolés de } G\}$ et $\mathcal{F} = E(G)$.

Question 9. *Proposez ainsi un autre algorithme d'approximation tout en précisant le facteur d'approximation.*

SOLUTION. En utilisant l'algorithme glouton avec $(B, \mathcal{F})$ défini comme dans la réponse de la question précédente, le facteur d'approximation est $H(2) = 1 + 1/2 = 1.5$ car chaque élément de la couverture couvre deux éléments de B .

Algorithme A2

On propose un nouvel algorithme, noté A2 : (1) construire une forêt couvrante ; (2) renvoyer une solution optimale pour cette forêt.

Question 10. *En supposant connu un algorithme de complexité polynomiale donnant la solution optimale pour une forêt, montrez qu'A2 est un algorithme d'approximation en précisant son facteur d'approximation.*

SOLUTION. L'algorithme est valide, car si les sommets de la forêt sont couverts, les sommets du graphe le seront car c'est le même ensemble. De plus il est clairement de complexité polynomiale. Son facteur d'approximation est $(n - 1)/(n/2) = 2 - 2/n$ car c'est au moins $n/2$ et au plus toutes les arêtes de la forêt (ce qui peut arriver dans le cas d'une étoile). L'algorithme A2 est donc une $(2 - 2/n)$ -approximation, comme A1.

Question 11. *Donnez une instance critique pour l'algorithme A2.*

SOLUTION. Si G est une clique avec un nombre n pair de sommets, alors la solution optimale est $n/2$ (avec un couplage parfait). Mais si la forêt couvrante est une étoile, alors l'algorithme donnera $n - 1$ arêtes, soit $(n - 1)/(n/2) = 2 - 2/n$.

Algorithme A3

On propose un autre algorithme, noté A3 : (1) construire un couplage maximal ; (2) pour chaque sommet non couvert par le couplage choisir une de ses arêtes incidentes ; et (3) renvoyer les arêtes sélectionnées aux étapes (1) et (2).

Question 12. *Quelle est la propriété de l'ensemble des sommets non couverts après application de l'étape (1) ?*

SOLUTION. C'est un ensemble indépendant, sinon le couplage ne serait pas maximal.

Question 13. *Expliquez la différence entre un couplage maximal et maximum.*

SOLUTION. La notion de « maximal » est pour l'inclusion (maximal local en quelque sorte), alors que « maximum » est un maximum absolu (ou global).

Question 14. Montrez que l'algorithme A3 peut ne pas trouver la taille optimale. [Aide : Considérez le cas d'un graphe possédant un couplage parfait.]

SOLUTION. Un chemin à trois arêtes $u - v - w - z$, avec le couplage maximal (et non maximum) $M = \{v - w\}$. Du coup A3 va renvoyer un ensemble d'arêtes $E' = M \cup \{u - v, w - z\}$ avec $|E'| = 3$. Ceci n'est pas optimal car on pouvait faire $\{u - v, w - z\}$ ce qui fait une arête de moins.

Algorithme A4

On propose une variante de l'algorithme A3, variante notée A4, consistant pour l'étape (1) à prendre un couplage maximum plutôt que maximal, les étapes (2) et (3) restant identiques.

Question 15. Montrez que l'algorithme A4 trouve la taille optimale si le graphe possède un couplage parfait.

SOLUTION. Le nombre d'arêtes d'un couplage parfait est $n/2$, et c'est aussi un minorant pour le problème (comme on l'a déjà vu), puisqu'encore une fois k arêtes ne peut pas couvrir plus de $2k$ sommets et il y a n sommets à couvrir.

Question 16. Montrez que si le graphe n'a pas de sommet isolé et contient un ensemble indépendant I , alors la taille optimale d'une COUVERTURE PAR ARÊTES est au moins $|I|$.

SOLUTION. Une arête ne peut pas couvrir deux sommets de I , c'est donc au moins $|I|$.

Question 17. Montrez que l'algorithme A4 donne toujours la solution de taille optimale.

SOLUTION. C'était une question plus difficile.

Soit M un couplage maximum pour G , et soit X les sommets couverts par M . On a $|X| = 2|M|$. Clairement, $I = V \setminus X$ est un ensemble indépendant, puisque sinon on pourrait ajouter une arête supplémentaire à M en choisissant une arête de I . Dit autrement, V se partitionne en X et I , et donc $|V| = n = |I| + |X| = |I| + 2|M|$. D'un autre côté, il faut $|M|$ arêtes pour couvrir X , car une arête ne peut couvrir que deux sommets et $|X| = 2|M|$. Et on a déjà vu que $|I|$ arêtes sont nécessaires pour couvrir I . Donc le nombre $f(M)$ optimal d'arêtes pour couvrir G , selon le choix de M , vaut $f(M) = |I| + |M|$. Mais comme $n = |I| + 2|M|$, on en déduit (par soustraction) que $n - f(M) = |M|$. Or $|M|$ est maximum, c'est donc que le nombre d'arêtes $f(M)$ est minimum (car n est bien évidemment indépendant du choix de M).