
Documents (cours et notes personnelles) autorisés.

Des reines sur un échiquier

Un problème classique consiste à placer huit reines d'un jeu d'échecs sur un échiquier de 8×8 cases sans que les reines ne puissent se menacer mutuellement, conformément aux règles du jeu d'échecs (la couleur des pièces étant ignorée). Ainsi, deux reines ne devraient jamais partager la même rangée, colonne, ou diagonale de l'échiquier.

Question 1. *Un algorithme exhaustif naïf qui consisterait à explorer tous les positionnements des 8 reines sur l'échiquier devrait explorer combien de possibilités ?*

SOLUTION. Il faut placer 8 reines sur 64 cases, produisant au plus $\binom{64}{8} = 4,426,165,368$ possibilités. On peut faire aussi un calcul plus fin : 8×8 possibilités pour la 1ère reines, 7×7 possibilités pour la 2e car la 1ère (et plus généralement chaque reine déjà posée) élimine une ligne et une colonne pour produire une sous-grille strictement plus petite. Pour la 3e reine il reste 6×6 , etc. Au total cela fait $(8!)^2 = 1,625,702,400$ possibilités, 4 fois moins que le premier calcul.

Question 2. *Expliquer comment modéliser ce problème par un problème de graphe à l'aide d'un graphe G possédant comme sommets les 64 cases de l'échiquier. Décrire les arêtes de G et spécifier le problème à résoudre.*

SOLUTION. Les sommets de G sont les cases (i, j) avec $i, j \in \{1, \dots, 8\}$, et les arêtes sont les paires $(i, j) - (i', j')$ si et seulement une reine sur la case (i, j) peut se rendre sur la case (i', j') . Cela veut dire $i' = i$ ou $j' = j$ ou $|i' - i| = |j' - j|$. Il s'agit alors de déterminer si ce graphe G possède un ensemble indépendant de taille 8.

On propose la variante consistant à déterminer le nombre minimum de reines nécessaires pour contrôler toutes les cases d'un échiquier de taille $n \times n$.

Question 3. *Expliquer comment modéliser ce problème par un problème de graphe.*

SOLUTION. Le graphe est identique, seulement on cherche alors un ensemble dominant de taille minimum.

Question 4. *Trouver le nombre minimal de reines à positionner pour contrôler un échiquier 4×4 . Dessiner une solution et argumenter pour démontrer l'optimalité de votre solution.*

SOLUTION.



Ainsi, 2 reines sont suffisantes. C'est aussi nécessaire car une reine ne peut pas dominer plus de $4 \times 3 + 1 = 13$ cases (1 ligne, 1 colonne et 2 diagonales de 3 sommets, plus la case courante). Or la grille en contient 16. Il faut donc au moins 2 reines pour tout dominer.

Couvrir des points dans l'espace

On considère le problème PLANCOVER (couverture de points par des plans) défini comme suit :

Entrée : Un ensemble $P \subset \mathbb{R}^3$ de n points de l'espace, et un entier k .

Question : Existe-t'il un ensemble de k plans passant par tous les points de P ?

Si nécessaire, vous supposerez connue la routine qui, étant donné un ensemble S d'au plus trois points, renvoie un plan passant par tous les points de S , de même que la routine permettant de tester si un point appartient à un plan ou une droite donné. On ne demande donc pas d'écrire ces routines.

On rappelle qu'il n'y a qu'un seul plan passant par trois points non-alignés, et que deux plans non-parallèles se coupent selon une droite.

Question 5. Décrire un algorithme (et sa complexité) permettant de résoudre PLANCOVER lorsque $k = 1$. [Attention ! P pourrait contenir plus de trois points alignés.]

SOLUTION. Prendre 2 points et chercher un 3e point non-alignés. S'il n'y en a pas, renvoyer un plan passant par tous ces points. Sinon, trouver l'unique plan et tester si les autres points sont bien couverts par ce plan.

On suppose maintenant que P ne contient pas plus de t points alignés. Dit autrement, toute droite de l'espace passe par au plus t points de P .

Question 6. Donner une règle de réduction montrant que PLANCOVER, lorsque k et t sont des paramètres, admet un noyau. Vous devez justifier, c'est-à-dire montrer que votre réduction est correcte et polynomiale tout en donnant la taille du noyau.

SOLUTION. Prendre une droite contenant plus de tk points. La remarque est que deux plans s'intersectent selon une droite. Donc si on ne prend pas un plan couvrant $|S| > tk$ points alors il en faudra au moins $k + 1$ autres. Il y a que $\binom{n}{3} = O(n^3)$ plans possibles à tester. Et avec k plans couvrant chacun au plus tk points, on ne couvre que tk^2 points au maximum. Donc le noyau est de taille tk^2 .

Question 7. En combinant la question précédente à un algorithme d'approximation, proposer un algorithme polynomial qui : soit répond « non » et alors P ne peut pas être couverte par k plans ; soit renvoie un ensemble de $O(k \log(tk))$ plans couvrant tous les points de P . [Faites attention que même après le calcul du noyau, la couverture de P par $O(k \log(tk))$ plans peut ne pas exister et dans un tel cas l'algorithme devra répondre « non ».]

SOLUTION. On commence par réduire le problème à un noyau $P' \subseteq P$ de taille tk^2 grâce à la question précédente. Si on échoue, répondre « non ». Cette étape est polynomiale.

Sinon, on applique l'algorithme glouton de Set Cover avec l'entrée $(B, \mathcal{F})$ où $B = P'$ et $\mathcal{F}$ est l'ensemble des plans possibles pour couvrir P' . En effet, on souhaite couvrir les points de P' par des plans. Notons que l'entrée $(B, \mathcal{F})$ de l'algorithme glouton est de taille $|B| + |\mathcal{F}| \leq |P'| + |P'|^3 = O(t^3 k^5)$. L'algorithme glouton étant polynomial en la taille de l'entrée, cette étape là est donc aussi polynomiale en n puisque $t, k = O(n)$.

Si l'algorithme glouton trouve une solution avec moins de $kH(tk) = O(k \log(tk))$ plans, où H est la fonction harmonique, on la renvoie. Sinon on répond « non ».

En effet, chaque plan de $\mathcal{F}$ ne couvre qu'au plus tk points à cause de la réduction. Donc si une solution avec k plans existe, l'algorithme glouton produira une couverture d'au plus $kH(k)$ plans d'après le cours, comme désiré.

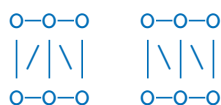
Décomposition arborescente des graphes planaires

On propose d'étudier des graphes planaires construits par la procédure suivante :

1. Construire une "étoile", un graphe composé d'un sommet central connecté à tous les autres (qu'on appellera feuilles) ;
2. Tant que le graphe reste planaire, ajouter des arêtes arbitrairement entre les feuilles.

Question 8. Dessiner deux graphes planaires différents ayant chacun 7 sommets construits selon cette procédure. (Vous devez argumenter pour affirmer que ce sont bien des graphes différents même à une renumérotation près des sommets.)

SOLUTION. On démarre avec les deux graphes planaires suivants à six sommets (sans le centre de l'étoile qu'on ajoutera après), dont toutes faces internes sont des triangles :



Ils sont planaires extérieurs et clairement différents, celui de gauche par exemple étant le seul à posséder un sommet de degré 5. On peut alors ajouter sur la face extérieure un sommet (le centre de l'étoile) connecté au 6 sommets. Plus aucune autre arête ne peut être ajoutée puisque toutes les faces sont désormais des triangles.

Clairement, les deux graphes auraient pu être obtenus par la procédure, en construisant d'abord l'étoile puis en ajoutant le autres arêtes selon les deux planaires extérieurs ci-dessus. Ils sont bien différents, seul celui de gauche aura deux sommets de degré 6.

Question 9. Démontrer que tous les graphes construits de cette manière sont de largeur arborescente au plus 3.

SOLUTION. Ils ont un arbre couvrant de rayon $r = 1$. Donc de largeur arborescente au plus $3r = 3$ d'après la construction vue en cours.

Question 10. Donner un exemple de tels graphes de largeur arborescente exactement 3.

SOLUTION. Le graphe K_4 , une clique à 4 sommets.