
Answers can be done in English or in French. Course document authorised.

Museum under control

The building of a museum is modeled by a graph where the nodes represent the rooms and the edges the galleries, i.e., the corridors between the rooms. For simplicity, we assume the galleries are thin and straight.

The goal is to control all the galleries of the museum by adding fully rotative cameras. It is assumed that the cameras can be placed at the rooms only. By making a 360° turn, a camera can control all galleries connected to the room where the camera is located.

For instance, if the museum graph is a square (a cycle of 4 nodes and 4 edges), then two cameras suffice (placed at two non-adjacent nodes).

Question 1. Give a graph problem whose solution allows us to determine the minimum number of cameras needed to control a museum.

SOLUTION. On met une caméra par sommets et il faut couvrir toutes les arêtes. C'est donc une instance du problème Vertex Cover de taille minimum.

Question 2. Give the minimum number of cameras to control a museum which is a complete graph with n rooms ?

SOLUTION. La taille optimal est $n - 1$. Si on utilise $< n - 1$ sommets alors une arête n'est pas couverte. Un sommet du graphe n'a pas besoin d'être dans la solution car tous ces voisins le sont et couvre donc ses arêtes incidentes.

A fast cubic algorithm

A computer scientist just designs a nice algorithm for graphs with n nodes. Its theoretical complexity is cubic in the number of edges of the graph. She decides to program it to test its performances on a 1 GHz-clock computer which is able to run 1 billion of instructions per seconde.

Question 3. How long shall her program run for an input graph having $n = 1\,000$ nodes ? (approximately in the worst-case).

Your answer should be on the form : x "unit(s)" where x is an integer < 10 , and where "unit" is a time unit chosen among : seconde, minute, hour, day, week, month or year.

SOLUTION. Avec $n = 1\,000$ sommets, le graphe possède au plus $m = n(n - 1)/2 = 500 \times 999 = 499\,500$ arêtes. La complexité de l'algorithme étant m^3 , le temps est donc (en année) : $499\,500^3 / 10^9 / 3\,600 / 24 / 365 \approx 3.95 \approx 4$ ans.

Circle cover

The consider the following problem :

Input : A set P of n points in the plane, and an integer k .

Output : Is there a set of at most k circles that contains all the points of P .

Note that a point (x, y) that is inside of the inner disk defined by a circle C is not considered as to be "contained" by C . To be contained by C , we mean that the point belongs to C . We are looking for a circle cover, not a disk cover. Also, we assume that arithmetic operations on point coordinates take a constant time.

Question 4. Describe briefly an algorithm for the case $k = 1$. What is its complexity?

SOLUTION. Considérer le cercle C passant par trois points quelconques (s'il y a moins de 3 points on peut répondre OUI directement). Le cercle C peut être décrit par une équation de la forme $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r$. Peu importe en fait. Cela prend un temps constant pour construire C , c'est-à-dire calculer les paramètres réels a, b, r de l'équation. Puis, pour chacun des $n - 3$ autres points p , tester en temps constant si $p \in C$ en vérifiant l'équation. Cela prend un temps $O(n)$ au total.

Question 5. Same question for $k = 2$.

SOLUTION. On considère tous les cercles passant par un point donné. Il y en a au plus n^2 . En fait il y en a moins car le cercle passant par les trois points X, Y, Z est le même que celui passant par X, Z, Y . Y'en a $\binom{n-1}{2} = (n-1)(n-2)/2$. Peu importe. Considérons un cercle C . On sélectionne tous les points $Q \subseteq P$ qui appartiennent à C , et on pose $T = P \setminus Q$. On peut construire Q et T en temps $O(n)$ une fois C déterminé. On teste si les points de T sont dans un même cercle en temps $O(|T|) = O(n)$ grâce à la question 1). Au final, cela donne un algorithme en $O(n^3)$.

Question 6. Give a reduction rule showing that this problem, whenever k is a fixed parameter, admits a kernel. What is the size of the kernel? Is the reduction rule polynomial? Argue. (Hint : observe that two different circles intersect in at most two points.)

SOLUTION. S'il existe un cercle C contenant plus de $2k$ points alors on choisit ce cercle, et on reconsidère le problème $(P \setminus S, k - 1)$ où S est l'ensemble des points couverts par C . En effet, si on ne prend pas C , alors il faudra $> |S|/2 = k$ cercles $C' \cap C$ ne contient qu'au plus 2 points. Dit autrement, si (P, k) est VRAI alors $(P \setminus S, k - 1)$ aussi. Bien sûr si (P, k) est FAUX, alors $(P \setminus S, k - 1)$ doit aussi être FAUX car clairement $(P \setminus S, k - 1)$ VRAI implique (P, k) VRAI. C'est donc une règle de réduction valide.

D'après l'application de cette règle, il vient : s'il reste plus de $2k^2$ points, alors on renvoie FAUX, sinon on a trouvé un noyau de taille $2k^2$. En effet, si chaque cercle possible ne couvre qu'au plus $2k$ points, alors k plans ne peuvent couvrir qu'au plus $2k^2$ points. La règle est polynomial car il existe au plus n^3 cercles possibles sur n points, et cela prend un temps $O(k)$ pour savoir si k points de P sont couverts par un cercle donné.

Question 7. Propose a polynomial time algorithm that either returns a set of $O(k \log k)$ circles containing all the points of P , or returns "no" to say that one need more than k circles to contained all the points of P . [Hint : Combine the solution of the previous question with an approximation algorithm slightly modified.]

SOLUTION. On commence par réduire le problème à un noyau $P' \subseteq P$ de taille $2k^2$ grâce à la question précédente. Si on échoue, répondre « non ». Cette étape est polynomiale.

Sinon, on applique l'algorithme glouton de Set Cover avec l'entrée $(B, \mathcal{F})$ où $B = P'$ et $\mathcal{F}$ est l'ensemble des cercles possibles pour couvrir P' . En effet, on souhaite couvrir les points de P' par des cercles. Notons que l'entrée $(B, \mathcal{F})$ de l'algorithme glouton est de taille $|B| + |\mathcal{F}| \leq |P'| + |P'|^3 = O(k^5)$. L'algorithme glouton étant polynomial en la taille de l'entrée, cette étape là est donc aussi polynomiale en k , donc en n .

Si l'algorithme glouton trouve une solution avec moins de $kH(2k) = O(k \log(k))$ cercles, où H est la fonction harmonique, on la renvoie. Sinon on répond « non ».

En effet, chaque cercle de $\mathcal{F}$ ne couvre qu'au plus $2k$ points à cause de la réduction. Donc si une solution avec k cercles existe, l'algorithme glouton produira une couverture d'au plus $kH(2k)$ cercles d'après le cours, comme désiré.

Tree-decomposition

Question 8. Recall the definition of a tree-decomposition T of a graph G .

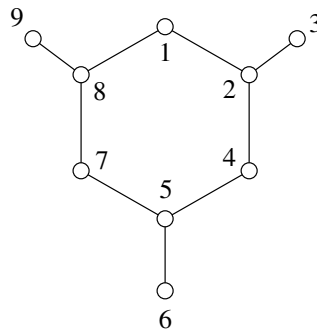
SOLUTION. Voir le cours.

We consider a $n \times n$ grid graph G , i.e., a grid having n rows of n columns. So G has n^2 nodes in total. We also consider a path Q of $n - 1$ nodes denoted by $X_1 - X_2 - \dots - X_{n-1}$ such that each X_i is composed of all the nodes of the i th and $(i + 1)$ -th rows of G . So $|X_i| = 2n$.

Question 9. Does Q represent a tree-decomposition of G ? explain why?

SOLUTION. OUI, c'est une tree-decomposition, car Q est un arbre (c'est même un chemin), couvre tous les sommets et les arêtes. De plus, chaque sommet apparaît dans au plus deux sacs consécutifs du chemin.

Question 10. Draw a tree-decomposition of smallest possible width for the following graph. [Hint : You can forget the degree-1 node, construct a tree-decomposition, and then update it.]



SOLUTION. Pour le cycle, on peut faire les bags le chemin : $\{1, 2, 4\} - \{1, 4, 5\} - \{1, 5, 7\} - \{1, 7, 8\}$. Et pour les sommets de degré 1, on peut ajouter les sacs $\{3, 2\}$, $\{6, 5\}$, $\{9, 8\}$ connecté respectivement aux bags du cycles via 2, 5, 8. Dit autrement,

$$\begin{array}{ccccccc}
 \{1, 2, 4\} & - & \{1, 4, 5\} & - & \{1, 5, 7\} & - & \{1, 7, 8\} \\
 | & & | & & & & | \\
 \{2, 3\} & & \{5, 6\} & & & & \{8, 9\}
 \end{array}$$

Matching

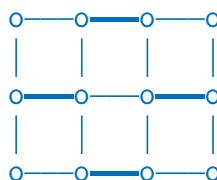
Question 11. Recall what is a perfect matching.

SOLUTION. Un couplage parfait est un couplage (ensemble d'arêtes indépendantes) couvrant tous les sommets.

Let us denote by G_2 the 3×4 grid graph, i.e., the grid composed of 3 rows and 4 columns and having 12 nodes.

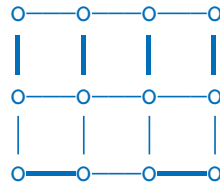
Question 12. Draw for G_2 a maximal matching having the minimum size. (You do not need to argue why this is the minimum possible size.)

SOLUTION. Couplage maximal de taille 4 pour G_2 .



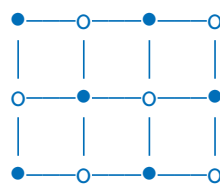
Question 13. Draw for G_2 a maximum matching, i.e., a matching of maximum size. Argue why this is the maximum.

SOLUTION. Couplage maximum de taille 6 pour G_2 . Il est parfait, car il couvre les 12 sommets du graphe, il est donc maximum.



Question 14. Draw for G_2 a vertex cover of minimum size. Argue that this is the minimum.

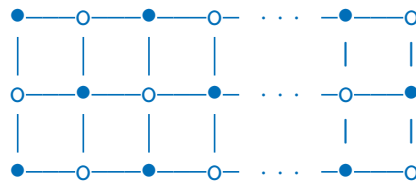
SOLUTION. Vertex Cover de taille 6. Il est optimal car le graphe possède un couplage de taille 6. On ne peut donc pas faire mieux, on a toujours besoin au moins d'un sommet par arête indépendante.



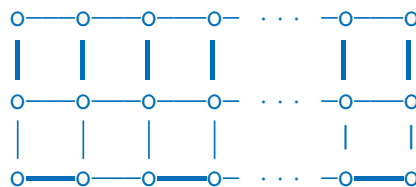
Let us denote by G_n the $3 \times 2n$ grid graph. This graph has $6n$ nodes, and G_2 is a particular case of G_n with $n = 2$.

Question 15. Give the construction of a vertex cover of minimum size for G_n for every n , and give its size. Argue why this is the minimum size.

SOLUTION. Vertex Cover de taille minimum pour G_n est de taille $3n$. On peut le construire comme suit. À chaque paires de colonnes rajoutées on peut ajouter 3 sommets à la solution.



Cette couverture est de taille optimale car G_n possède un couplage parfait de taille $3n$. On ne peut donc pas faire mieux puisque le graphe à $6n$ sommets. Et voici le schéma générique pour le couplage :



END.