

# Corrigé partiel DM (INF 208)

## Licence d'Informatique, Semestre 6

Bruno Courcelle  
UFR de Maths et Info, Université Bordeaux 1

Avril Brisé 2006

Corrigé succinct des exercices les moins bien réussis.

**Note :** "Avril Brisé" est un roman de Ismaël Kadaré, écrivain albanais.

### Exercice 3.

On construit un automate non déterministe à 5 états notés  $T, H, G, F1, F2$ , de telle façon que :

Si l'on prend  $T$  comme état acceptant, l'automate reconnaît tous les termes.

Si l'on prend  $H$  comme état acceptant, l'automate reconnaît l'ensemble des termes de la forme  $h(t)$ ,

Si l'on prend  $F1$  comme état acceptant, l'automate reconnaît l'ensemble des termes de la forme  $f(t, t')$ ,

Si l'on prend  $G$  comme état acceptant, l'automate reconnaît l'ensemble des termes de la forme  $g(h(t), f(t', t''))$ ,

Si l'on prend  $F2$  comme état acceptant, l'automate reconnaît l'ensemble des termes de la forme  $c[f(t''', g(h(t), f(t', t'')))]$  pour des contextes  $c$  et des termes quelconques  $t, t', t'', t'''$ .

Les transitions sont :

$(a, T), (b, T), (T, T, f, T), (T, T, g, T), (T, h, T),$   
 $(T, T, f, F1), (H, F1, g, G), (T, h, H), (T, G, f, F2),$   
 $(F2, *, x, F2), (*, F2, x, F2), (F2, h, F2),$

où  $*$  représente n'importe quel état et  $x$  représente  $f$  ou  $g$ .

En prenant  $F2$  comme état acceptant, on obtient un automate qui reconnaît  $L$ .

Sa détermination produit un automate dont les états sont les suivants :

$\{T\}, \{T, H\}, \{T, G\}, \{T, F1\}, \{T, F1, F2\}$

et l'état acceptant est  $\{T, F1, F2\}$ . C'est un automate déterministe et complet. Pour reconnaître le complémentaire de  $L$ , il suffit de prendre pour états acceptants :  $\{T\}, \{T, H\}, \{T, G\}, \{T, F1\}$ .

**Exercice 4.**

On a vu en TD que  $L = \{w \in \{e, f\}^* : |w|_e = |w|_f\}$ , est engendré par la grammaire dont les règles sont :

$$S \longrightarrow ESFS ; S \longrightarrow FSES ; S \longrightarrow \varepsilon ; E \longrightarrow e ; F \longrightarrow f.$$

Le langage  $K = \{w \in \{a, b, c, d\}^* : |w|_a + |w|_b = |w|_c + |w|_d\}$  est obtenu en remplaçant dans les mots de  $L$  la lettre  $e$  par  $a$  ou  $b$  et la lettre  $f$  par  $c$  ou  $d$ , et donc engendré par la grammaire :

$$S \longrightarrow ESFS ; S \longrightarrow FSES ; S \longrightarrow \varepsilon ; E \longrightarrow a ; E \longrightarrow b ; F \longrightarrow c ; F \longrightarrow d.$$

**Exercice 5.**

1) Les arbres de dérivation de taille au plus 5 sont les suivants, classés par taille, nonterminal axiome, écrits comme des termes avec le mot engendré. On considère comme une même dérivation les différentes dérivations ayant un même arbre. Il y a 11 issues de  $S$ .

- 1 :  $S : r : b$
- 1 :  $T : t : c$
- 2 :  $T : s(t) : acb$
- 3 :  $S : p(r, r) : abb$
- 3 :  $S : q(r, t) : acbc$
- 3 :  $T : s(s(t)) : aacb$
- 4 :  $S : q(r, s(t)) : acbacb$
- 4 :  $T : s(s(s(t))) : aaacbbb$
- 5 :  $S : p(r, p(r, r)) : ababb$
- 5 :  $S : p(r, q(r, t)) : abacbc$
- 5 :  $S : p(p(r, r), r) : aabbab$
- 5 :  $S : p(q(r, t), r) : aacbcb$
- 5 :  $S : q(r, s(s(t))) : acbaacb$
- 5 :  $S : q(p(r, r), t) : acabbc$
- 5 :  $S : q(q(r, t), t) : acacbcc$
- 5 :  $T : s(s(s(s(t)))) : aaaacbbbb$ .

2) Etats d'un automate déterministe incomplet qui reconnaît les arbres de dérivation :  $S$  et  $T$ .

Transitions :  $(r, S), (S, S, p, S), (S, T, q, S), (T, s, T), (s, T)$ .

3) Le tableau de la Question 1 donne :

$$N(S, 1) = 1, N(S, 2) = 0, N(S, 3) = 2, N(S, 4) = 1, N(S, 5) = 7, \\ N(T, n) = 1 \text{ pour tout } n > 0.$$

4) Notons  $f_S(n) = f(n)$  le nombre d'arbres de transition de taille  $n$  issus de  $S$ , et  $f_T(n)$  de même pour  $T$ .

Il résulte de l'examen de la grammaire que :

$$f_T(n) = \begin{cases} \text{si } n = 0 \text{ alors } 0 \\ \text{sinon } 1 \end{cases} \\ f_S(n) = \begin{cases} \text{si } n = 0 \text{ alors } 0 \\ \text{si } n = 1 \text{ alors } 1 \\ \text{sinon } 1 \end{cases}$$

$$\sum\{f_S(m) f_S(n-m-1) : 1 \leq m \leq n-2\} + \sum\{f_S(m) f_T(n-m-1) : 1 \leq m \leq n-2\}.$$

Cette dernière expression se réduit ainsi :

$$\sum\{f_S(m) (f_S(n-m-1) + 1) \mid 1 \leq m \leq n-2\}.$$

5) Notons  $g_S(n) = g(n)$  le nombre de mots de longueur  $n$  engendrés à partir de  $S$ , et  $g_T(n)$  de même pour  $T$ .

Il résulte de l'examen de la grammaire (notant qu'elle est non ambiguë) que:

$$g_T(n) = \begin{cases} \text{si } n \text{ est pair alors } 0 \text{ sinon } 1. \\ g_S(n) = \begin{cases} \text{si } n = 0 \text{ alors } 0 \text{ sinon} \\ \text{si } n = 1 \text{ alors } 1 \text{ sinon} \end{cases} \end{cases}$$

$$\sum\{g_S(m)g_S(n-m-1) : 1 \leq m \leq n-2\} + \sum\{g_S(m) g_T(n-m-2) : 1 \leq m \leq n-3\}.$$

Cette dernière expression se réduit ainsi :

$$\sum\{g_S(m) (g_S(n-m-1) + \lceil (n-m-2)/2 \rceil) : 1 \leq m \leq n-3\} + g_S(n-2).$$

Un mot engendré par une dérivation de  $n$  étapes est de longueur comprise entre  $n$  et  $2n$ . On a donc  $g(n) \leq f(n)$ .

Si  $n$  est plus grand que 2, le fait que la règle  $q$  a deux symboles terminaux en partie droite implique que  $g(n) < f(n)$ .