

Théorie des Langages

Licence d'Informatique
 Contrôle Continu
 Mars 2006

- Indiquez votre groupe de TD (ou le nom de l'enseignant)
- Marquez le temps que vous avez passé à rédiger (cela n'influera pas votre note)

Important : Les transitions d'automates d'arbres, qui ne concernent que des fonctions d'arités 1 ou 2, seront données de préférence comme des tableaux à 1 ou 2 entrées (tables de multiplication) associés à chaque fonction. D'autres représentations seront acceptées à condition d'être claires et sans ambiguïtés.

Il n'est pas nécessaire de TOUT faire pour avoir 20/20. La qualité de la rédaction est très importante.

Exercice 1. Soit $F = \{0, 1, 2, 3, +, *\}$ avec l'interprétation usuelle des constantes et des opérations dans \mathbb{N} . Soit $L = \{ t \in T(F) \mid \text{val}(t) = 0 \text{ modulo } 6 \}$, où $\text{val}(t) \in \mathbb{N}$ est la valeur numérique du terme t . On rappelle que $x = y \text{ modulo } p$ signifie que $x - y$ est un multiple de p . Construire un automate qui reconnaît L .

Exercice 2. Soient f, g, a, b d'arités respectives 2, 1, 0, 0.

1. Est-ce que $L_1 = \{ f(g^n(a), g^m(b)) \mid n, m \geq 0 \text{ et } n = m \text{ modulo } 3 \}$ est reconnaissable?
2. Même question pour $L_2 = \{ f(g^n(a), g^m(b)) \mid n, m \geq 0 \text{ et } n = 3m + 2 \}$.

On donnera un automate ou une preuve de non existence.

Exercice 3. Soit $F = \{f, g, h, a, b\}$ avec f, g, h, a, b d'arités respectives 2, 2, 1, 0, 0. Soit L l'ensemble des termes de la forme $C[f(t_1, g(h(t_2), f(t_3, t_4)))]$ tels que C est un contexte et t_1, \dots, t_4 sont des termes quelconques.

On rappelle qu'un contexte est un terme C de $T(F, \{u\})$ avec une occurrence de u et que $C[t]$ désigne le résultat de la substitution de t à u dans C .

1. Donner un automate, déterministe ou non, qui reconnaît L .
2. Donner un automate déterministe qui reconnaît $T(F) - L$.

Exercice 4. Construire une grammaire algébrique qui engendre :

$$\{ w \in \{a, b, c, d\}^* \mid |w|_a + |w|_b = |w|_c + |w|_d \}$$

Justifier la construction.

Exercice 5. On considère la grammaire G d'axiome S dont les règles, nommées p, q, r, s, t , sont données par :

$$\begin{aligned} p & : S \rightarrow aSS \\ q & : S \rightarrow acST \\ r & : S \rightarrow b \\ s & : T \rightarrow aTb \\ t & : T \rightarrow c \end{aligned}$$

1. Donner toutes les dérivations (issues de S) de longueur au plus 5.
2. Écrire un automate déterministe \mathcal{A} qui reconnaît les arbres de dérivation de cette grammaire.
3. Soit Q l'ensemble des états de l'automate \mathcal{A} . Pour tout $u \in Q$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$N(u, n) = \text{le nombre de termes de taille exactement } n \text{ reconnus par } \mathcal{A} \text{ par un calcul qui termine avec } u \text{ à la racine.}$$

Calculer $N(u, n)$ pour chaque u et pour $n = 0, 1, \dots, 5$. Comparer avec la question 1.

4. Soit $f(n)$ le nombre d'arbres de dérivations de G (d'axiome S) de taille exactement n . On donnera une expression récursive en n qui permettrait de programmer son calcul mais on ne cherchera pas à résoudre cette expression au moyen d'une formule explicite.
5. On note $g(n)$ le nombre de mots de longueur n sur l'alphabet $\{S, T, a, b, c\}$ engendrés par G à partir de S .
Donner une définition récursive de g . Expliquer pourquoi $f(n) \neq g(n)$ pour $n > 2$.