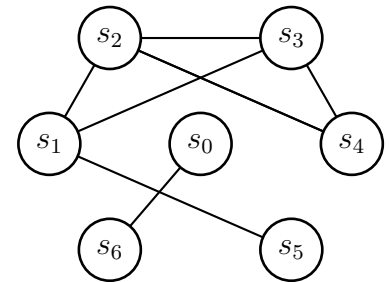


Notions de graphe, sommet, arête, degré d'un sommet, graphe connexe, composante connexe, listes d'adjacence, matrice d'adjacence, matrice d'incidence

Exercice 1

Soit G_1 le graphe dessiné ci-contre à droite.

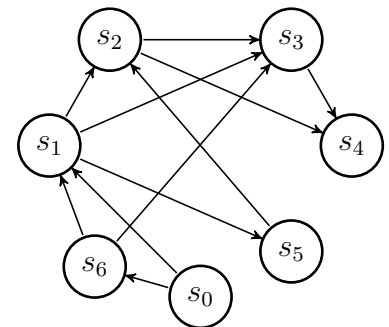
1. Pour chaque sommet s_i de G_1 , donner le degré de s_i et la liste des voisins de s_i (la liste d'adjacence de s_i).
2. Quel est le degré minimum et le degré maximum de G_1 ?
3. Donner la matrice d'adjacence et la matrice d'incidence de G_1 .
4. Le graphe G_1 contient-il un cycle ? Si oui, quel est le plus long cycle élémentaire contenu dans G_1 ?
5. G_1 est-il un graphe connexe ou pas ? Justifier.



Exercice 2

Soit G_2 le graphe dessiné ci-contre à droite.

1. Pour chaque sommet s_i de G_2 , donner les degrés entrant et sortant de s_i et la liste des successeurs de s_i (la liste d'adjacence de s_i).
2. Donner la matrice d'adjacence et la matrice d'incidence de G_2 .
3. Le graphe G_2 contient-il un circuit ? Si oui, quel est le plus long circuit élémentaire contenu dans G_2 ?
4. G_2 est-il un graphe fortement connexe ou pas ? Justifier.



Notions de boucle, arêtes parallèles, graphe simple

Exercice 3

1. Dessiner plusieurs graphes dont les sommets ont comme degrés 4, 3, 2, 1, 1, 1, 0, dont
 - au moins un graphe contenant une boucle,
 - au moins un graphe sans boucle mais contenant des arêtes parallèles, et
 - au moins un graphe simple.
2. Quel est le nombre d'arêtes dans chacun de ces graphes ? Peut-il exister un autre graphe avec les sommets de mêmes degrés, ayant un nombre d'arêtes différents ? Justifier.
- (*) Proposer une suite d'entiers naturels telle qu'il existe un graphe non-simple ayant comme degrés les valeurs de la suite, mais il n'existe pas de graphe simple ayant comme degrés les valeurs de la suite.
- (*) Proposer une suite d'entiers naturels telle qu'il n'existe aucun graphe (simple ou pas) ayant comme degrés les valeurs de la suite.

Calcul avec des degrés, parité de degrés

Exercice 4

(*) Un graphe simple G a 15 arêtes, 3 sommets de degré 4, les autres étant de degré 3. Quel est le nombre de sommets du graphe G ?

Exercice 5

Dans un graphe connexe un isthme est une arête dont la suppression augmente le nombre de composantes connexes. Montrer qu'un graphe dont tous les sommets sont de degré pair ne possède pas d'isthme.

Exercice 6

(*) Est-il possible qu'un groupe de 9 personnes soit tel que chacun soit l'ami de 5 personnes exactement du groupe ?

Exercice 7

(*) M. et Mme Euler assistent à une réunion. Il y a trois autres couples dans l'assistance et plusieurs poignées de mains sont échangées. Personne ne serre sa propre main et les époux ne se serrent pas la main. Deux personnes quelconques de l'assemblée se serrent la main au plus une fois. M. Euler constate que les 7 autres personnes ont échangé des poignées de mains en nombres tous distincts. Combien de poignées de mains M. et Mme Euler ont-ils échangé avec les autres membres de la réunion ?

Manipulation formelle, démonstration directe, raisonnement par l'absurde

Exercice 8

Soit G un graphe ayant k composantes connexes. Soit u et v deux sommets non-adjacents de G . Soit G' le graphe obtenu à partir de G en ajoutant une nouvelle arête reliant u et v .

1. Montrer que si u et v sont dans la même composante connexe de G , alors G' contient un cycle qui passe par la nouvelle arête uv .
2. Montrer que si u et v sont dans la même composante connexe de G , alors G' a autant de composantes connexes que G .
3. Montrer que si u et v sont dans deux composantes connexes distinctes de G , alors le nombre de composantes connexes de G' est égal à $k - 1$.
4. En déduire qu'en général, l'ajout d'une arête peut faire diminuer le nombre de composantes connexes d'un graphe d'au maximum une.

Calcul à partir de la matrice d'adjacence, de la matrice d'incidence, des listes d'adjacences

Exercice 9

Soit G un graphe non orienté représenté par la matrice d'adjacence A .

1. Proposer un algorithme qui décide si G contient ou pas un sommet isolé (un sommet de degré 0).
2. Proposer un algorithme qui calcule le degré maximum de G .
3. Proposer un algorithme qui calcule le degré minimum de G .

Soit G un graphe non orienté représenté par la matrice d'incidence B .

1. Proposer un algorithme qui calcule le degré maximum de G .
- (*) Proposer un algorithme qui décide si G contient ou pas un sommet isolé.
- (*) Proposer un algorithme qui calcule le degré minimum de G .

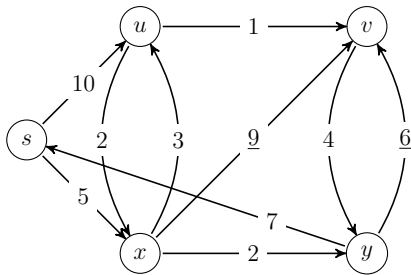
Soit G un graphe représenté par les listes d'adjacence $Adj[]$.

1. Proposer un algorithme qui calcule le degré minimum de G .
- (*) Proposer un algorithme qui décide si G contient ou pas un sommet isolé.
- (*) Proposer un algorithme qui calcule le degré maximum de G .

Plus courts chemins

Exercice 10

Soit $G_1 = (X_1, A_1)$ le graphe orienté avec une fonction de pondération $w : A_1 \rightarrow \mathbf{R}$ représenté ci-dessous.



1. En appliquant l'algorithme de *Dijkstra*, déterminer la distance (longueur du plus court chemin) du sommet s à chacun des sommets de G_1 .

Soit les graphes orientés G_2, G_3 et G_4 (avec une fonction de pondération sur les arcs) représentés ci-dessous.

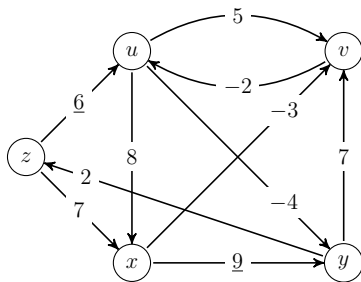


FIGURE 1 – G_2

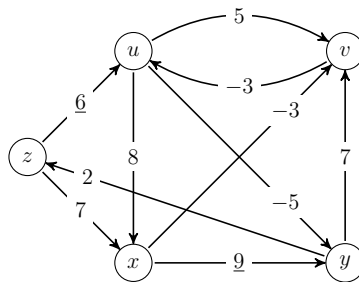


FIGURE 2 – G_3

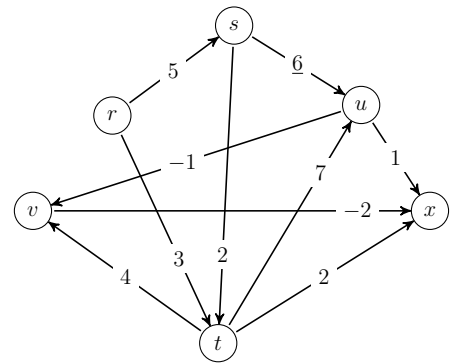


FIGURE 3 – G_4

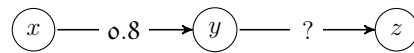
2. Appliquer l'algorithme de *Ford* pour résoudre le problème des plus courts chemins ayant pour origine le sommet z dans les graphes G_2 et G_3 .
3. En remarquant que le graphe G_4 est sans circuit, utiliser un algorithme efficace pour calculer les plus courts chemins ayant pour origine le sommet s . Vous explicitez la complexité de votre algorithme.

Exercice 11

On considère un graphe orienté modélisant un réseau avec une source. Le sommet *source* émet des messages vers les autres sommets. Sur chaque arc il y a une probabilité (comprise entre 0 et 1) de transmission sans erreur d'un message. La probabilité de ne pas avoir d'erreur de transmission le long d'un chemin dépend des probabilités des arcs qui le composent.

1. Quelle doit être la probabilité sur chaque arc d'un chemin si l'on veut être sûr qu'un message soit transmis sans erreur ?

2. Quelle doit être la probabilité de l'arc (y, z) du graphe ci-dessous si l'on souhaite que le chemin de x à z ait une probabilité de transmission sans erreur de 0.4 ? Quid si l'on souhaite que le chemin de x à z ait probabilité nulle?



3. Comment obtient-on la probabilité de transmission sans erreur le long d'un chemin à partir des probabilités des arcs qui le composent?
4. Modifier l'algorithme de *Dijkstra* afin de calculer les canaux de transmission les plus sûrs entre la source et chacun des autres sommets et l'appliquer au graphe suivant en utilisant s_0 comme source :

