

Feuille 3 - Graphes bipartis

On rappelle qu'un graphe G est biparti si et seulement si ses sommets peuvent être partitionnés en deux stables. En d'autres termes, un graphe G est biparti si et seulement si il est 2-coloriable. Si la partition de $V(G)$ en deux stables est $A \cup B$, alors on notera $G = (A \cup B, E)$.

Une arête-coloration d'un graphe G est une fonction des arêtes de G vers un ensemble de couleurs telle que deux arêtes ayant un sommet en commun ont des couleurs différentes. Un graphe est dit k -arête-coloriable si il existe une arête-coloration de G avec au plus k couleurs. L'indice chromatique d'un graphe, noté $\chi'(G)$ est le plus petit nombre de couleurs nécessaires pour colorier les arêtes de G .

Exercice 1

On note $\Delta(G)$ le degré maximum d'un graphe G et $\chi'(G)$ son indice chromatique. Le but de cet exercice est de montrer le théorème de König (1916) :

Tout graphe biparti G vérifie $\chi'(G) = \Delta(G)$.

1. Montrer que pour tout graphe G , $\chi'(G) \geq \Delta(G)$.
2. On montre la proposition par induction sur le nombre d'arêtes du graphe G . Pour $m(G) = 0$, la proposition est vraie. Supposons G biparti, avec $m(G) = m \geq 1$ et la propriété vraie pour tout graphe biparti ayant au plus $m - 1$ arêtes.
 - (a) Soit $e = xy \in E(G)$. Par hypothèse, $G' = G \setminus e$ possède une coloration propre des arêtes avec $\Delta = \Delta(G)$ couleurs. Si α est une couleur utilisée, on appelle α -arêtes les arêtes coloriées α . Montrer qu'il existe deux couleurs α et β telles que x n'est pas incident dans G' à une α -arête et y n'est pas incident dans G' à une β -arête.
 - (b) Peut-on conclure si $\alpha = \beta$?
 - (c) Si $\alpha \neq \beta$ et x est incident à une β -arête dans G' , on considère une chaîne commençant en x coloriée alternativement β, α . Cette chaîne peut-elle passer par y ?
 - (d) Terminer la preuve.

Exercice 2

Si G est un graphe biparti et S un sous-ensemble de $V(G)$, $\Gamma(S)$ désigne l'ensemble des sommets voisins d'au moins un sommet de l'ensemble S . On désignera un graphe biparti par le couple $(V_1 \cup V_2, E)$, où V_1 et V_2 induisent tous les deux des stables, et par $n_1(G)$ et $n_2(G)$ les cardinaux respectifs des ensembles V_1 et V_2 .

On rappelle le théorème de Hall, qui peut se démontrer en utilisant les flots :

Un graphe biparti $G = (V_1 \cup V_2, E)$ contient un couplage de taille $n_1(G)$ si et seulement si

$$\forall S \subseteq V_1, |\Gamma(S)| \geq |S|$$

1. Montrer qu'un graphe biparti $G = (V_1 \cup V_2, E)$ vérifie :

$$\forall S \subseteq V_1, |\Gamma(S)| \geq |S| - d$$

si et seulement si G contient $n_1(G) - d$ arêtes indépendantes.

2. Soit $G = (V_1 \cup V_2, E)$ un graphe biparti,
- h , le nombre maximum d'arêtes indépendantes de G ;
 - j , le nombre minimum de sommets et d'arêtes couvrants tous les sommets.
- On veut montrer que :

$$\alpha(G) = j = n(G) - h$$

en utilisant les trois étapes suivantes :

- (a) Montrer que $j = n(G) - h$.
- (b) Montrer que $n(G) - h \geq \alpha$.
- (c) Montrer que $n(G) - h \leq \alpha$ en utilisant le résultat de la question 1.

Exercice 3

Soit G un graphe biparti. Montrer que G et \overline{G} sont parfaits.