

Optimisation Combinatoire - Partie Graphes - Cours 3

Olivier Baudon

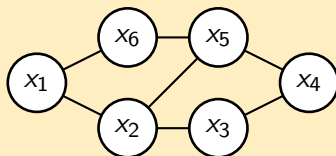
Université de Bordeaux

24 janvier 2025

Définition

Soit un graphe $G = (V, E)$. G est triangulé si et seulement si tout cycle de longueur > 3 possède une corde.

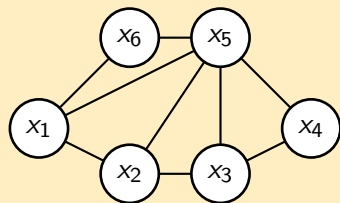
Une corde est une arête qui relie deux sommets non consécutifs sur le cycle.



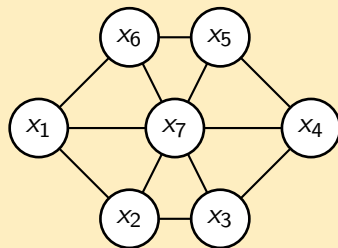
Exemple de corde

Graphes triangulés

Exemples



Graphe triangulé



Graphe non triangulé

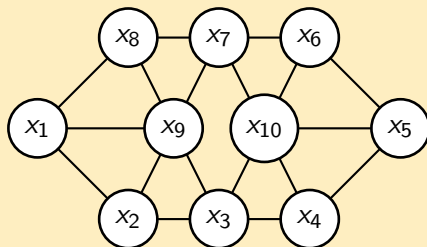
Remarques

- ▶ G est triangulé si et seulement si il ne contient pas de cycle C_k , $k > 3$ comme sous-graphe induit.
- ▶ Être triangulé est une propriété héréditaire : si G est triangulé, il en est de même pour tous ses sous-graphes induits.
- ▶ Les graphes triangulés sont aussi appelés graphes **cordaux** (chordal graph en anglais).

Définition

Soit un graphe $G = (V, E)$. $S \subset V$ est un **séparateur** si et seulement si il existe deux sommets a et $b \in V \setminus S$ qui ne sont pas connectés dans $G_{V \setminus S}$. On dira que S est un **(a, b) -séparateur**.

Exemple : dans le graphe ci-dessous, $S = \{x_3, x_7\}$ forme un (x_1, x_5) -séparateur.

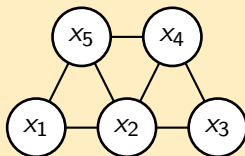


Définition

S'il n'existe pas de sous-ensemble de S qui sépare a de b , alors S est un séparateur **minimal**.

Exemple : dans le graphe ci-dessous, $\{x_2, x_4, x_5\}$ forme un (x_1, x_3) -séparateur.

$\{x_2, x_5\}$ et $\{x_2, x_4\}$ sont des (x_1, x_3) -séparateurs minimaux.



Théorème

Dans un graphe triangulé, tout séparateur minimal est une clique.

Preuve

Soit $G = (V, E)$ un graphe triangulé. Soit S un (a, b) -séparateur minimal de G . On note C_a et C_b les composantes connexes respectives de a et b dans $G_{V \setminus S}$.

Si $|S| = 1$, G_S est bien une clique.

Supposons que $|S| > 1$, et soient x et $y \in S$. Comme S est minimal, x est relié à un sommet de C_a et à un sommet de C_b . De même pour y .

On choisit a_1 un sommet de C_a relié à x et a_k un sommet de C_a relié à y de façon à ce que la distance entre a_1 et a_k soit minimum. De même, on choisit b_1 un sommet de C_b relié à y et b_l un sommet de C_b relié à x de façon à ce que la distance entre b_1 et b_l soit minimum.

Preuve - suite

On considère a_1, a_2, \dots, a_k la plus courte chaîne reliant a_1 et a_k dans C_a , et b_1, b_2, \dots, b_l la plus courte chaîne reliant b_1 et b_l dans C_b (remarque : on peut avoir $a_1 = a_k$ et/ou $b_1 = b_l$).

Comme a_1, \dots, a_k et b_1, \dots, b_l sont des plus courtes chaînes,

$$\forall i, j, 1 \leq i, j \leq k, j > i + 1, a_i a_j \notin E$$

$$\forall i, j, 1 \leq i, j \leq l, j > i + 1, b_i b_j \notin E$$

De par le choix de a_1, a_k, b_1 et b_l :

$$\forall i, j, 1 < i \leq k, 1 \leq j < k, x a_i \notin E \text{ et } y a_j \notin E$$

$$\forall i, j, 1 \leq i < l, 1 < j \leq l, x b_i \notin E \text{ et } y b_j \notin E$$

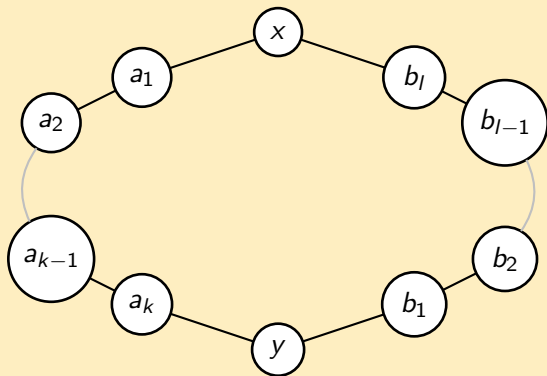
De plus, comme S est un séparateur,

$$\forall i, j, 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq l, a_i b_j \notin E$$

Or $x, a_1, \dots, a_k, y, b_1, \dots, b_l, x$ est un cycle de longueur au moins 4. donc contient une corde. Donc $xy \in E$.

Comme c'est vrai pour toute paire de sommets x et y de S , G_S est donc une clique.

Preuve - schémas

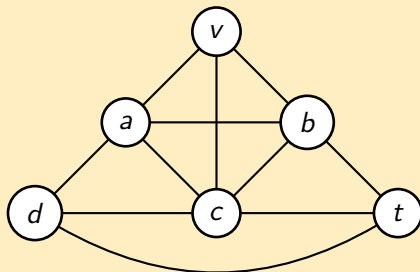


Sommet simplicial

Définition

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté. Un sommet $v \in V$ est dit **simplicial** si et seulement si le voisinage de v :

$N(v) = \{w \in V \mid vw \in E\}$ induit une clique. Dans l'exemple ci-dessous, v est simplicial, mais pas le sommet t , car $bd \notin E$.



Sommet simplicial

Théorème

Tout graphe triangulé $G = (V, E)$ possède un sommet simplicial et si G n'est pas une clique, il en a au moins deux non adjacents.

Preuve

Si G est une clique, tous ses sommets sont simpliciaux.

Supposons que la propriété soit vraie pour tout graphe triangulé d'ordre au plus $n - 1$, avec $n \geq 2$.

Si G n'est pas une clique, alors G possède au moins deux sommets a et b non adjacents. Soit S un (a, b) -séparateur minimal, C_a et C_b les composantes connexes de $G_{V \setminus S}$ contenant respectivement a et b .

$G_{C_a \cup S}$ est un graphe triangulé. Si c'est une clique, tous les sommets de C_a sont simpliciaux dans G .

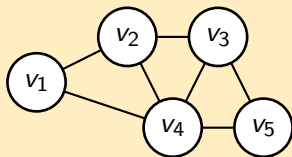
Sinon, par hypothèse d'induction, il possède deux sommets simpliciaux non adjacents, dont au moins un n'est pas dans S (car S est une clique).

Comme le raisonnement s'applique également à G_{C_b} , G possède deux sommets simpliciaux non adjacents.

Ordre d'élimination simplicial

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Soit $\sigma = [v_1, \dots, v_n]$ un ordre sur les sommets de G . On dit que σ est un **ordre d'élimination simplicial** si et seulement si $\forall i, 1 \leq i \leq n$, v_i est un sommet simplicial dans $G_{\{v_i, \dots, v_n\}}$.

Exemple : v_1, v_2, \dots, v_5 est un ordre d'élimination simplicial dans le graphe ci-dessous.



Sommet simplicial

Théorème

G est triangulé $\Leftrightarrow G$ possède un ordre d'élimination simplicial.

Preuve

\Rightarrow

Si G est triangulé, alors G admet un sommet simplicial : v_1 .

$G \setminus v_1$ est triangulé... On peut répéter l'opération jusqu'au dernier sommet.

\Leftarrow

Soit G un graphe admettant un ordre d'élimination simplicial. Soit C un cycle de G de taille > 3 .

Soit x le sommet de C ayant le plus petit numéro dans l'ordre d'élimination simplicial. Ses deux voisins dans C sont forcément reliés par une arête. Donc C possède une corde.

Parcours en largeur lexicographique : LexBFS

Algorithme LexBFS

Entrée : $G = (V, E)$ un graphe, s un sommet de V .

Sortie : σ ordre total sur les sommets de G .

- 1: **pour tout** $x \in V$ **faire**
- 2: $label(x) \leftarrow \emptyset$
- 3: **fin pour**
- 4: $label(s) \leftarrow \{n\}$
- 5: **pour** i de n à 1 **faire**
- 6: Choisir v de label maximal dans l'ordre lexicographique
- 7: $\sigma^{-1}(i) \leftarrow v$
- 8: **pour tout** $u \in Adj(v)$, non numéroté **faire**
- 9: $label(u) \leftarrow label(u) \cup \{i\}$
- 10: **fin pour**
- 11: **fin pour**

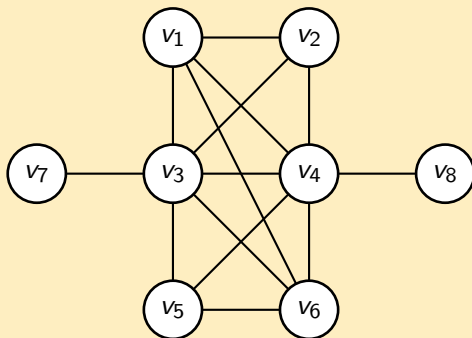
Parcours en largeur lexicographique : LexBFS

LexBFS

La complexité de LexBFS est en $O(n + m)$.

Théorème : G est triangulé si et seulement si l'ordre obtenu par LexBFS est simplicial.

Exemple : LexBFS(G, v_1)



Parcours en largeur lexicographique : LexBFS

Exemple

Calcul des labels :

i	$\sigma^{-1}(i)$	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
		8	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset
8	v_1	X	8	8	8		8		
7	v_2		X	87	87		8		
6	v_3			X	876	6	86	6	
5	v_4				X	65	865	6	5
4	v_6					654	X	6	5
3	v_5					X		6	5
2	v_7							X	5
1	v_8								X

Parcours en largeur lexicographique : LexBFS

Exemple

On vérifie que l'ordre obtenu est bien simplicial. Si oui, G est triangulé, sinon G possède un cycle de longueur ≥ 4 sans corde.

Voisinages dans $G_{\{v_i, \dots, v_n\}}$:

i	$\sigma(i)$	$N_{G_{\{v_i, \dots, v_n\}}}(\sigma(i))$	
1	v_8	$\{v_4\}$	K_1
2	v_7	$\{v_3\}$	K_1
3	v_5	$\{v_3, v_4, v_6\}$	K_3
4	v_6	$\{v_1, v_3, v_4\}$	K_3
5	v_4	$\{v_1, v_2, v_3\}$	K_3
6	v_3	$\{v_1, v_2\}$	K_2
7	v_2	$\{v_1\}$	K_1
8	v_1	\emptyset	

Donc G est bien triangulé.