

# Optimisation Combinatoire - Partie Graphes - Cours 2

Olivier Baudon

Université de Bordeaux

22 janvier 2024

## Rappels de définitions et notations

Soit un graphe  $G = (V, E)$

- ▶  $\alpha(G)$  désigne la taille du plus grand stable de  $G$
- ▶  $\omega(G)$  désigne la taille de la plus grande clique de  $G$

Par exemple,  $\alpha(C_6) = 3$  et  $\omega(C_6) = 2$ .

- ▶  $\overline{G} = (V, \overline{E})$  désigne le complémentaire de  $G$ , c'est à dire le graphe tel que  $\forall x, y \in V, xy \in \overline{E} \Leftrightarrow xy \notin E$ .

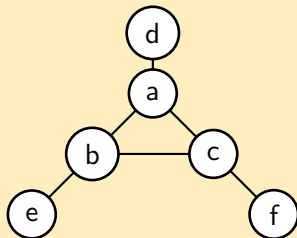
Remarque :  $\overline{\overline{G}} = G$

## Couverture de cliques

Une couverture de cliques de taille  $k$  est une partition de  $V$  en  $V = A_1 \cup A_2 \dots \cup A_k$  telle que chaque sous graphe induit  $G_{A_i}$  soit une clique.

On notera par  $k(G)$  le plus petit  $k$  tel que  $G$  admet une couverture de cliques de taille  $k$ .

Exemple : dans le graphe  $G$  ci-dessous,  $k(G) = 3$  en prenant  $A_1 = \{a, d\}$ ,  $A_2 = \{b, e\}$ ,  $A_3 = \{c, f\}$ . On peut remarquer que  $k(G) \geq 3$  car  $\alpha(G) \geq 3$  en considérant le stable  $\{d, e, f\}$



## Propositions

- ▶  $k(G) \geq \alpha(G)$
- ▶  $\chi(G) \geq \omega(G)$
- ▶  $\omega(G) = \alpha(\overline{G})$
- ▶  $\chi(G) = k(\overline{G})$

## Définition (Claude Berge - 1961)

Un graphe  $G = (V, E)$  est parfait si et seulement si, pour tout  $S \subseteq V$ ,  $\chi(G_S) = \omega(G_S)$ .

**Remarque :** La propriété "est parfait" est par définition **héréditaire**.  
Exemples de graphes parfaits : les graphes complets, les stables, les cycles de longueur paire, les graphes bipartis.

Preuves :

- ▶ Tout sous-graphe d'un graphe complet est complet. Et pour tout entier  $n$ ,  $\chi(K_n) = \omega(K_n) = n$ .
- ▶ Tout sous-graphe d'un graphe biparti est biparti. Soit  $G = (A \cup B, E)$ , un graphe biparti. Si  $G$  ne contient aucune arête, alors  $\chi(G) = \omega(G) = 1$ . Sinon  $\chi(G) = \omega(G) = 2$ .

Les cycles impairs  $\neq C_3$  sont imparfaits. En effet, soit  $C_{2n+1}$ ,  $n \geq 2$  un cycle impair.  $\chi(C_{2n+1}) = 3 \neq \omega(C_{2n+1}) = 2$ .

## Propriété

Soit la propriété :

$$(P2) : \forall S \subseteq V(G), k(G_S) = \alpha(G_S).$$

$G$  est parfait si et seulement si  $\overline{G}$  satisfait (P2).

Théorème : conjecture faible des graphes parfaits (Berge - 1962), prouvée par Lovász en 1971

$G$  est parfait  $\Leftrightarrow \overline{G}$  est parfait.

## Théorème - Lovász

Soit  $G$  un graphe parfait et  $x$  un sommet de  $G$ . Soit  $H$  le graphe obtenu en remplaçant  $x$  par une clique  $C$  et en reliant tous les sommets de la clique aux voisins de  $x$ .

Alors  $H$  est parfait.

## Preuve

Remarque : il suffit de prouver le théorème avec  $C = K_2$ .

Preuve par récurrence sur le nombre de sommets de  $G$ .

Si  $n(G) = 1$ , alors  $H = K_2$  qui est parfait.

## Preuve - suite

Supposons que la propriété soit vraie pour tout graphe parfait ayant au plus  $n - 1$  sommets. Soit  $G$  un graphe parfait à  $n$  sommets et  $H$  le graphe obtenu à partir de  $G$ .

Si  $H_S$  est un sous-graphe strict de  $H$  ( $S \subsetneq V(H)$ ),

- ▶ si  $S \supseteq C$ , alors  $H_S$  a été obtenu en appliquant la transformation sur  $x$  dans un sous-graphe strict  $G'$  de  $G$ . Or  $G'$  est parfait et  $n(G') \leq n - 1$ . Donc par hypothèse d'induction,  $H_S$  est parfait.
- ▶ si  $S \not\supseteq C$ , alors  $H_S$  est un sous-graphe de  $G$  et donc  $H_S$  est parfait.



## Preuve - suite

Il reste donc à montrer que  $\omega(H) = \chi(H)$ .

On a :  $\omega(G) \leq \omega(H) \leq \omega(G) + 1$ .

Cas (1) : supposons que  $\omega(H) = \omega(G) + 1$ .

On a  $\chi(H) \leq \chi(G) + 1 = \omega(G) + 1 = \omega(H)$ .

Or  $\chi(H) \geq \omega(H)$ . Donc  $\omega(H) = \chi(H)$ .

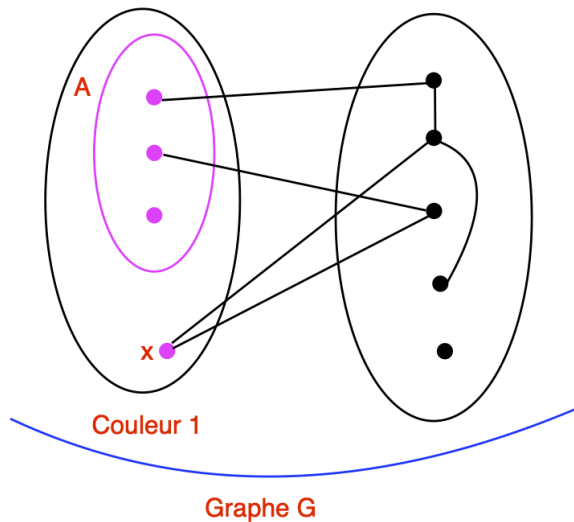
Cas (2) : on suppose que  $\omega(H) = \omega(G)$ .

Alors  $x$  n'est pas dans une clique de  $G$  de taille  $\omega(G)$ .

On colorie  $G$  avec  $\omega(G)$  couleurs, en affectant la couleur 1 à  $x$ .

Soit  $A$  l'ensemble des sommets de  $G$  coloriés 1 différents de  $x$ .

# Graphes parfaits



## Preuve - suite

$\omega(G \setminus A \cup \{x\}) = \chi(G \setminus A \cup \{x\})$  car  $G$  est parfait et donc  $G \setminus A \cup \{x\}$  est parfait.

$\chi(G \setminus A \cup \{x\}) = \chi(G) - 1$  car on enlève entièrement une couleur au graphe  $G$  (la couleur 1).

Donc  $\omega(G \setminus A \cup \{x\}) = \omega(G) - 1$ .

$x$  n'appartient pas à une clique de taille  $\omega(G)$ . Donc

$\omega(G \setminus A) = \omega(G) - 1$ . On colorie  $G \setminus A$  avec  $\omega(G) - 1$  couleurs.

Soit  $c$  cette coloration.

Dans  $H$ , on colorie les sommets de  $G \setminus A \cup \{x\}$  avec la coloration  $c$  et  $x_1$  avec  $c(x)$ . On colorie  $x_2$  et  $A$  avec une même couleur supplémentaire ( $A \cup \{x_2\}$  est un stable). On a donc une coloration de  $H$  avec  $\omega(G) = \omega(H)$  couleurs. Donc  $\chi(H) = \omega(H)$  et donc  $H$  est parfait.

## Approche polyédrale

Soit  $A$  une matrice  $m \times n$  composée de 0 et de 1.

$P(A) = \{x, Ax \leq \mathbf{1}\}$  avec  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^m$ .

$P_I(A)$  = enveloppe convexe( $\{x \in P(A)\}$ ,  $x$  est à coordonnées entières).

$P_I(A) \subseteq P(A)$ .

Si  $A$  ne contient pas de colonne nulle, alors le polyèdre est borné et les valeurs de  $x$  seront des vecteurs en  $\{0, 1\}$ .

Soit  $G$  un graphe dont  $A$  est la matrice cliques-sommets de  $G$ .

Chaque ligne correspond à une clique maximale de  $G$  et

$A_{i,j} = 1 \Leftrightarrow x_j \in C_i$  où  $x_j$  est le  $j^{\text{ème}}$  sommet de  $G$  et  $C_i$  sa  $i^{\text{ème}}$  clique maximale.

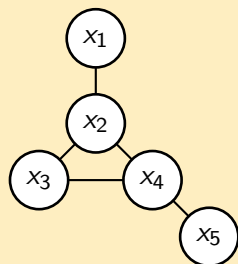
On dit également que  $G$  est le graphe dérivé de  $A$ .

## Approche polyédrale

Exemple :

$$\begin{matrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

*Matrice cliques-sommets*



*Graphe G dérivé*

## Approche polyédrale

Soit  $G = (V, E)$  un graphe et  $A$  une matrice cliques-sommets en  $\{0, 1\}$  n'ayant pas de colonne nulle dont  $G$  est le graphe dérivé. Alors  $x$  est un vecteur de  $P_I(A)$  si et seulement si  $x$  est le vecteur caractéristique d'un stable de  $G$ .

**Preuve :** Si  $S$  est un stable et  $C$  une clique, alors au plus un sommet peut appartenir à  $S \cap C$ . Donc si  $x$  est le vecteur caractéristique d'un stable  $S$ , le produit d'une ligne de  $A$  correspondant à une clique  $C$  et de  $x$  donnera 1 si  $|S \cap C| = 1$ , 0 sinon.

Inversement, si  $x$  est le vecteur représentatif d'un sous-ensemble  $S$  de  $V(G)$ , si  $Ax \leq \mathbb{1}$ , cela signifie qu'au plus un sommet de  $S$  appartient à chaque  $C_j$ . Donc il n'y a aucune arête entre les sommets de  $S$  et donc  $S$  est un stable.

**Théorème** (Chvátal, 1975) : Soit  $A$  une matrice cliques-sommets d'un graphe  $G$ . Alors  $G$  est parfait  $\Leftrightarrow P_I(A) = P(A)$