

Optimisation Combinatoire - Partie Graphes - Cours 1

Olivier Baudon

Université de Bordeaux

9 janvier 2025

Objectifs

- ▶ Notions liées à la coloration de graphes
- ▶ Exemples de preuves sur des problèmes "discrets"
- ▶ "Zoologie" des classes de graphes

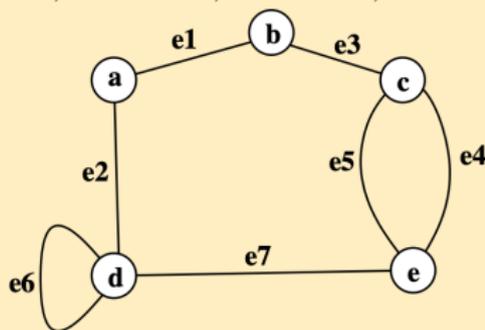
Ressources

- ▶ Page de la partie Graphes du cours
<https://dept-info.labri.fr/~baudon/Master/OptiComb/OptiComb.html>
- ▶ Espace Moodle
<https://moodle1.u-bordeaux.fr/course/view.php?id=5643>

Définitions et notation sur les graphes

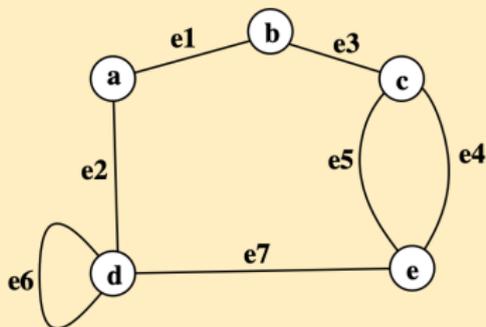
Graphe

- ▶ Un **graphe** G est un couple (V, E) où
 - ▶ V est un ensemble *non vide* dont les éléments sont appelés **sommets**,
 - ▶ E est un ensemble d'éléments appelés **arêtes**, chaque arête étant composée de deux sommets de V (pas forcément distincts).
- ▶ Exemple $G = (V, E)$ avec $V = \{a, b, c, d, e\}$ et $E = \{e1 = ab, e2 = ad, e3 = bc, e4 = ce, e5 = ce, e6 = dd, e7 = de\}$



Boucle et arête multiple

- ▶ Une arête reliant un sommet à lui-même est appelée une **boucle**.
- ▶ Un ensemble de plusieurs arêtes reliant deux mêmes sommets est appelé une **multi-arête**.

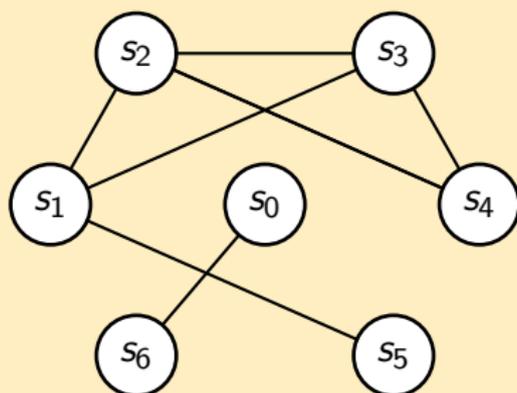


▶ e6 est une boucle et $\{e4, e5\}$ est une multi-arête.

Définitions et notation sur les graphes

Graphe simple

Un graphe **simple** est un graphe sans boucle, ni arête multiple.
Sauf mention contraire, les graphes considérés dans la suite de ce cours seront simples et non orientés.



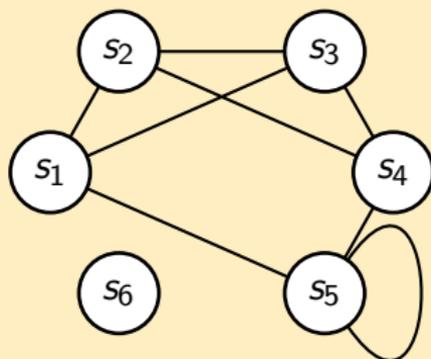
Définitions et notation sur les graphes

Degré

Le **degré** d'un sommet v dans un graphe G , noté $deg_G(v)$, est le nombre de fois où ce sommet est contenu dans un arête (une boucle compte pour 2).

S'il n'y a pas d'ambiguïté sur le graphe considéré, on utilisera la notation simplifiée $deg(v)$.

Dans l'exemple ci-dessous, le sommet S_2 est de degré 3, le sommet S_5 de degré 4 et le sommet S_6 de degré 0.



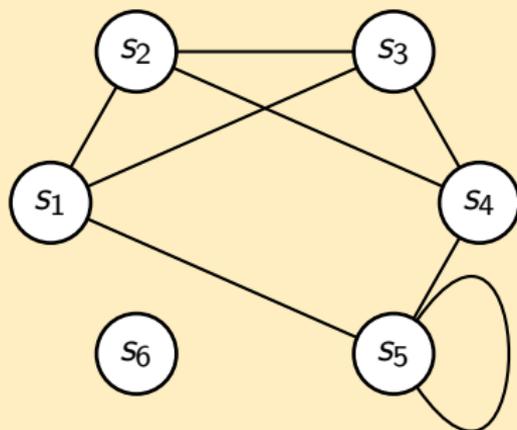
Définitions et notation sur les graphes

Relation d'adjacence - Voisinage

Deux sommets reliés par une arête seront dits **voisins** ou **adjacents**. L'ensemble des voisins d'un sommet v sera appelé le **voisinage** de v et noté $\Gamma(v)$.

Dans l'exemple ci-dessous,

$$\Gamma(s_2) = \{s_1, s_3, s_4\}, \Gamma(s_5) = \{s_1, s_4, s_5\}, \Gamma(s_6) = \emptyset.$$



Relation d'incidence

Une arête $e = uv$ sera dite **incidente** aux sommets u et v . De même, u et v seront dits **incidents** à e .

Deux arêtes $e_1 = uv$ et $e_2 = uw$ partageant un sommet (ici le sommet u), seront dites **voisines**.

Définitions et notation sur les graphes

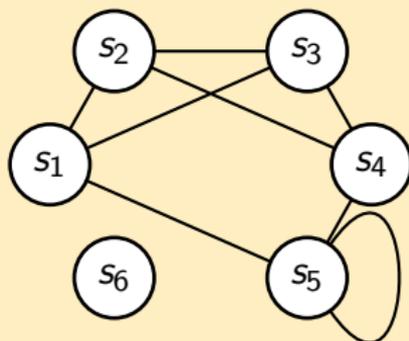
Ordre - Taille - Notation

Soit G un graphe. L'**ordre** de G , noté $n(G)$ est son nombre de sommets, la **taille** de G , noté $m(G)$ son nombre d'arêtes.

L'ensemble de ses sommets sera désigné par $V(G)$, l'ensemble de ses arêtes par $E(G)$, son degré maximum par $\Delta(G)$, son degré minimum par $\delta(G)$.

S'il n'y a pas d'ambiguïté sur le graphe considéré, on utilisera une notation simplifiée : n, m, V, E, Δ et δ .

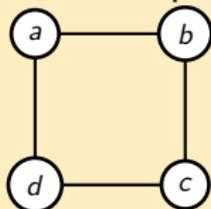
Dans l'exemple ci-dessous, $n = 6, m = 8, \Delta = 4, \delta = 0$.



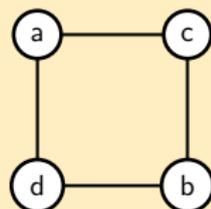
Étiquette

Le nom d'un sommet est appelé son **étiquette**, l'ensemble des étiquettes des sommets d'un graphe G l'**étiquetage** de G .

Les deux graphes ci-dessous sont différents car l'arête ab est une arête de G_1 , mais pas une arête de G_2 .



Graphe G_1

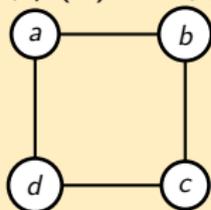


Graphe G_2

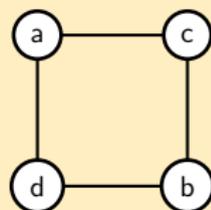
Isomorphisme

Deux graphes G_1 et G_2 seront dits **isomorphes** s'ils sont égaux à un renommage des sommets près, c'est à dire s'il existe une bijection φ de $V(G_1)$ vers $V(G_2)$ telle que pour toute paire de sommets u, v de $V(G_1)$, $uv \in E(G_1) \Leftrightarrow \varphi(u)\varphi(v) \in E(G_2)$.

Les deux graphes ci-dessous sont isomorphes avec $\varphi(a) = a, \varphi(b) = c, \varphi(c) = b, \varphi(d) = d$.



Graphe G_1



Graphe G_2

Chaîne

Une **chaîne** d'un graphe G est une suite alternée de sommets et d'arêtes de G : $v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, \dots, v_k, e_k, v_{k+1}$ telle que pour tout $1 \leq i \leq k$, $e_i = v_i v_{i+1}$.

La **longueur** d'une chaîne est son nombre d'arêtes.

Une chaîne est dite **simple** si elle ne contient pas deux fois la même arête.

Une chaîne est dite **élémentaire** si elle ne contient pas deux fois le même sommet. *Tout chaîne élémentaire est simple.*

Cycle

Un **cycle** est une chaîne dont les extrémités se confondent, i.e. une suite alternée de sommets et d'arêtes de G :

$v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, \dots, v_k, e_k, v_{k+1}$ telle que pour tout $1 \leq i \leq k$,
 $e_i = v_i v_{i+1}$ et $v_{k+1} = v_1$.

La **longueur** d'un cycle est son nombre d'arêtes et donc également de sommets.

Un cycle est dit **élémentaire** si il ne contient pas deux fois le même sommet à l'exception de ses extrémités.

Sauf précision contraire, on ne parlera que de chaîne ou de cycle élémentaire.

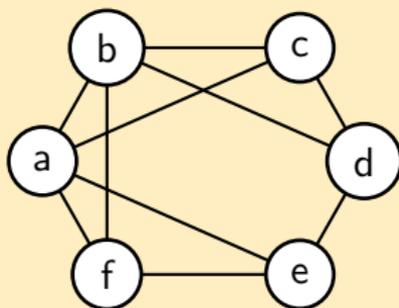
Une boucle ou une multi-arête sont des cycles.

Dans un graphe simple, on ne précisera pas les arêtes de la chaîne ou du cycle.

Exemples

Dans le graphe ci-dessous,

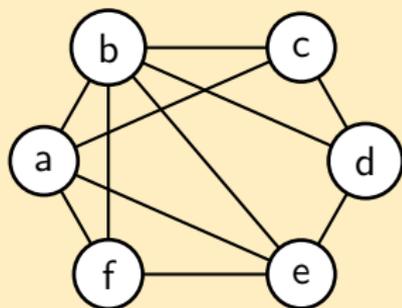
- ▶ aba est une chaîne non simple.
- ▶ $abcae$ est une chaîne simple non élémentaire.
- ▶ $abcde$ est une chaîne élémentaire.
- ▶ aba est un cycle non simple.
- ▶ $abcafea$ est un cycle simple non élémentaire.
- ▶ $abdca$ est un cycle élémentaire.



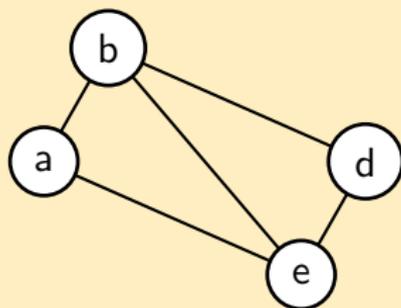
Sous-graphe induit

Soit G un graphe et $S \subseteq V(G)$. Le **sous-graphe de G induit par S** , noté G_S est le graphe (S, E') avec

$$E' = \{e \mid e \in E \text{ et } e = uv \text{ avec } u \in S, v \in S\}$$



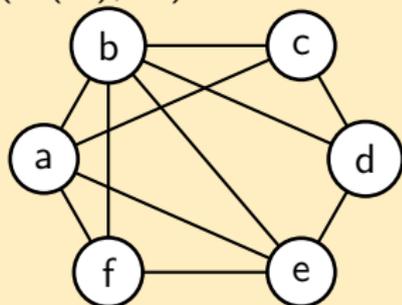
Graphe G



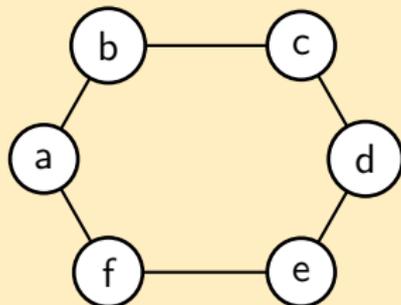
Graphe $G_{\{a,b,d,e\}}$

Graphe partiel

Soit G un graphe. Un graphe partiel de G est un graphe $G' = (V(G), E')$ avec $E' \subseteq E$.



Graphe G

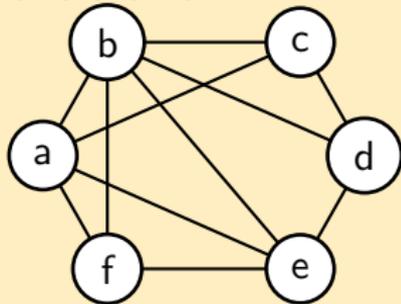


Graphe partiel de G

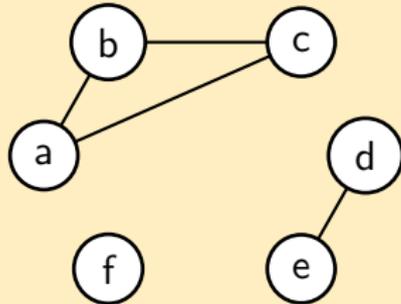
Graphe connexe

Un graphe G est dit **connexe** si et seulement si il existe une chaîne entre toute paire de sommets.

Remarque : pour montrer qu'un graphe G est connexe, il suffit de montrer qu'il existe un sommet v relié à tous les autres par au moins une chaîne.



Graphe connexe



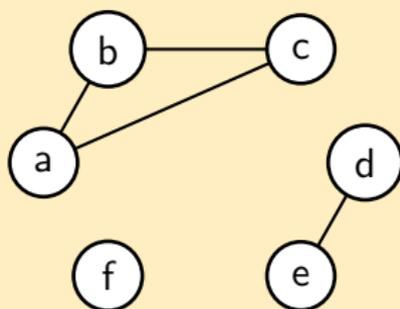
Graphe non connexe

Composante connexe

Une **composante connexe** d'un graphe est un sous-graphe induit maximal en nombre de sommets qui soit connexe.

Exemple

Le graphe ci-dessous possède 3 composantes connexes, $G_{\{a,b,c\}}$, $G_{\{d,e\}}$, $G_{\{f\}}$,



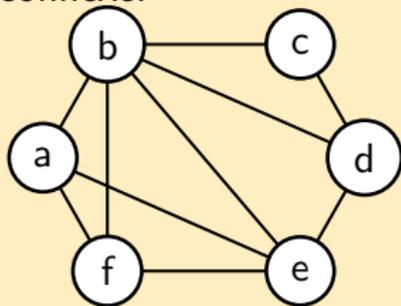
Connexité

Grphe k -connexe

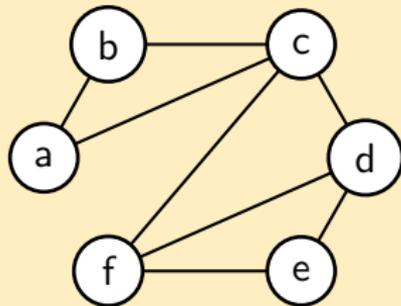
Soit k un entier ≥ 1 . Un graphe G est dit k -connexe si toute suppression d'au plus $k - 1$ sommet ne déconnecte pas le graphe.
Dire qu'un graphe est connexe ou 1-connexe est équivalent.

Connectivité

La connectivité d'un graphe G est le plus grand entier k tel que G est k -connexe.



Grphe de connectivité 2



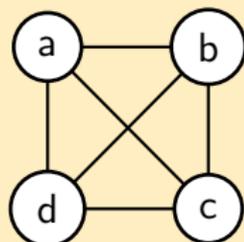
Grphe de connectivité 1

Graphe complet

Un **graphe complet** à n sommets, noté K_n , est un graphe simple dans lequel tous les sommets sont reliés par une arête.

A noter que par convention, un graphe complet K_n est de connectivité $n - 1$.

Le graphe ci-dessous est le graphe K_4 , graphe complet à 4 sommets.

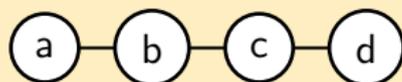


Graphes "classiques"

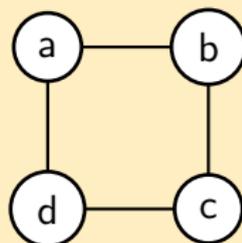
Chaîne et Cycle

Un graphe simple constitué d'une chaîne à n sommets : v_1, \dots, v_n , est appelé une **chaîne** et noté P_n .

Un graphe simple constitué d'un cycle à n sommets v_1, \dots, v_n, v_1 est appelé un **cycle** et noté C_n .



Grappe P_4



Grappe C_4

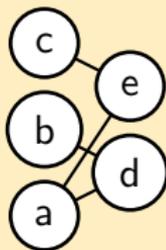
Graphes "classiques"

Stable et graphe biparti

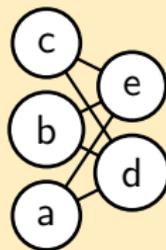
Un **stable** est un ensemble de sommets S dont le sous-graphe induit G_S ne contient aucune arête. Par extension, on dira également qu'un graphe sans arête est un stable.

Un graphe $G = (V, E)$ est dit biparti si V peut être partitionné en deux sous-ensembles A et B tels que A et B sont des stables. Dans ce cas, on notera G sous la forme $G = (A \cup B, E)$.

Le graphe biparti $G = (A \cup B, E)$ tel que $|A| = a$ et $|B| = b$ dans lequel tous les sommets de A sont reliés à tous les sommets de B est appelé **biparti complet** et noté $K_{a,b}$.



Graphe biparti



Graphe biparti $K_{3,2}$

Théorèmes

- ▶ Le nombre maximum d'arêtes dans un graphe simple est égal à $\frac{n \times (n-1)}{2}$.

Preuve : Le nombre maximum d'arêtes est égal à $\sum_{k=1}^{n-1} k$. En effet, si on compte les arêtes sommet par sommet, chaque sommet v possède au plus $n - 1$ arêtes incidentes potentielles, dont $i - 1$ ont déjà été comptées si v est le i ème sommet considéré.

Théorèmes

- La somme des degrés d'un graphe non orienté est paire et égale à deux fois le nombre d'arêtes.

Preuve : C'est vrai pour un graphe ayant 0 arête.

Supposons que cela soit vrai pour tout graphe ayant au plus m arêtes avec $m \geq 0$. Soit G un graphe ayant $m + 1$ arêtes. Soit G' le graphe obtenu en enlevant une arête e à G . G' possède m arêtes et on peut donc lui appliquer l'hypothèse de récurrence :

$$\sum_{v \in V(G')} \deg_{G'}(v) = 2 \times m$$

Si on rajoute l'arête e à G' , on augmente la somme des degrés de 2. Donc :

$$\sum_{v \in V(G)} \deg_G(v) = 2 \times m + 2 = 2 \times (m + 1)$$

Par récurrence, le théorème est donc vrai pour tout $m \geq 0$.

Si on applique ce résultat à un graphe simple à n sommets ayant un maximum d'arêtes, comme chaque sommet est de degré $n - 1$, la somme des degrés est $n \times (n - 1)$ et donc le nombre d'arêtes $\frac{n \times (n - 1)}{2}$.

Théorèmes

- ▶ Le nombre de sommets de degré impair dans un graphe non orienté est pair.

Preuve : Par l'absurde : sinon la somme des degrés serait impaire, donc on a une contradiction avec le théorème précédent.

- ▶ Dans tout graphe simple ayant au moins deux sommets, il existe au moins deux sommets de même degré.

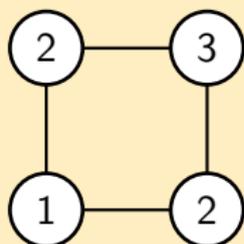
Preuve : Soit G un graphe simple ayant au moins deux sommets.

- ▶ Si tous les sommets sont de degré 0 → Ok.
- ▶ Sinon, il existe dans G une composante connexe C contenant au moins deux sommets. Soit k l'ordre de cette composante connexe. Les degrés des sommets de C peuvent aller de 1 à $k - 1$. Il y a donc $k - 1$ valeurs possibles pour les degrés de k sommets. Donc au moins deux d'entre eux ont le même degré.

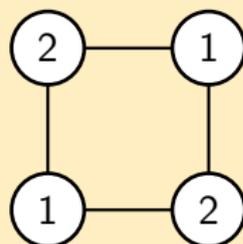
k -coloration

Une k -coloration d'un graphe $G = (V, E)$ est une application $c : V \rightarrow C$ où C est un ensemble de k couleurs (en général $C = \{1, 2, \dots, k\}$) telle que $\forall e = uv \in E, c(u) \neq c(v)$.

Exemples



3-coloration de C_4



2-coloration de C_4

Un graphe qui admet une k -coloration est dit **k -coloriable**.

Classes de couleurs

Si c est une coloration de $G = (V, E)$ dans $C = \{1, 2, \dots, k\}$, alors $c^{-1}(i), 1 \leq i \leq k$ est une **classe de couleur**.

Les sommets d'une classe de couleur constituent un stable.
Colorier un graphe revient donc à partitionner ses sommets en stables.

Nombre chromatique χ

Le **nombre chromatique** d'un graphe G , noté $\chi(G)$, est le plus petit entier k tel que G est k -coloriable. En d'autres termes, $\chi(G) = k$ si et seulement si G est k -coloriable et n'est pas $(k - 1)$ -coloriable. Un graphe de nombre chromatique k sera dit k -chromatique.

Exemple d'utilisation

Emploi du temps : énoncé

On considère un congrès constitué de 6 conférences notées 1, 2, 3, 4, 5, 6 destinées à 5 auditorios désignés par a, b, c, d, e.

Chaque conférence dure 1 jour. On veut connaître le nombre minimum de jours pour organiser le congrès.

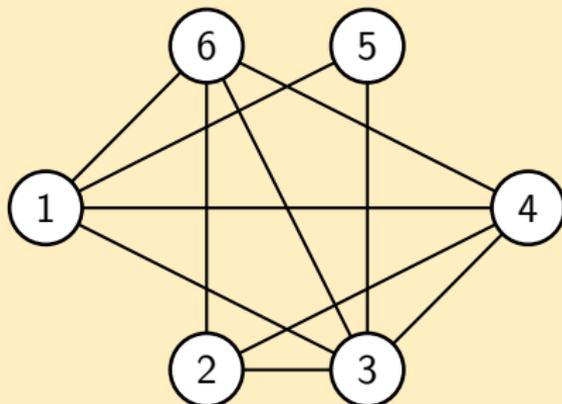
Le tableau ci-dessous précise quelles conférences souhaitent suivre les différents auditorios.

	1	2	3	4	5	6
a	X		X		X	
b		X	X	X		X
c	X			X		X
d	X		X		X	
e		X		X		X

Exemple d'utilisation

Emploi du temps : graphe

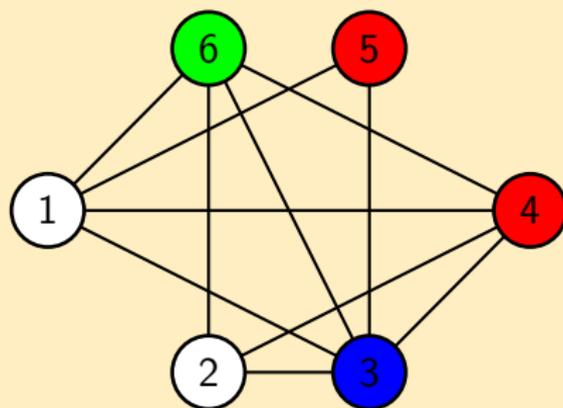
Le graphe représentant les incompatibilités entre deux conférences est dessiné ci-dessous. 2 conférences seront reliées par une arête si elles partagent un auditoire.



Exemple d'utilisation

Emploi du temps : coloration

On colorie le graphe avec un nombre minimum de couleur. La 4-coloration ci-dessous est optimale car le graphe contient une clique de taille 4 (sous-graphe induit isomorphe à K_4) : $G_{\{1,3,4,6\}}$



Exemples

- ▶ $\chi(K_n) = n$
- ▶ Soit T un arbre ayant au moins 2 sommets : $\chi(T) = 2$.
Preuve ?
- ▶ $\chi(C_n) = 2$ si n est pair, 3 si n est impair.

Problème de la k -coloration d'un graphe G

Données : $G = (V, E)$ un graphe, k un entier positif.

Question : G est-il k -coloriable ?

Le problème de la k -coloration d'un graphe G est NP-complet pour tout entier $k \geq 3$. Il est linéaire si $k = 1$ (en $O(n)$) ou $k = 2$ (en $O(n + m)$) .

Notation

On note par $\alpha(G)$ le cardinal du plus grand stable de G et par $\omega(G)$ le cardinal de sa plus grande clique.

Remarque : déterminer si pour un entier k et un graphe G , G contient un stable ou une clique de taille k sont des problèmes NP-complets.

Propositions

1. $\chi(G) \geq \omega(G)$
2. $\chi(G) \geq \frac{n(G)}{\alpha(G)}$

Preuve de la proposition 2 : soit k tel que $\chi(G) = k$. Soit I_1, \dots, I_k la partition des sommets de G en k stables, correspondant aux k classes de couleurs.

$$n(G) = \sum_{i \leq k} |I_i| \leq k \times \alpha(G)$$

$$\text{Donc } \frac{n(G)}{\alpha(G)} \leq k$$

Énoncé

Soit v_1, \dots, v_n un ordre total sur les sommets du graphe $G = (V, E)$.

Pour i allant de 1 à n , colorier v_i avec la plus petite couleur disponible (i.e. non encore utilisée par ses voisins).

Remarques :

- ▶ First-Fit est un exemple d'algorithme glouton.
- ▶ First-Fit n'est pas optimal.
Par exemple, si on prend une chaîne à 4 sommets v_1, v_2, v_3, v_4 et que l'on considère l'ordre v_1, v_4, v_2, v_3 , on devra utiliser 3 couleurs alors que 2 sont suffisantes.
- ▶ Si on utilise First-Fit, le nombre de couleurs utilisé est au plus $\Delta(G) + 1$.

Encadrement de $\chi(G)$

Encadrement

$$\max\{\omega(G), \frac{n(G)}{\alpha(G)}\} \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1$$

Théorème de Brooks - 1941

Énoncé

Soit G un graphe de degré maximum Δ .

$$\chi(G) = \Delta + 1 \Leftrightarrow$$

1. $\Delta = 2$ et une composante connexe de G est un cycle impair.
2. $\Delta \neq 2$ et une composante connexe de G est $K_{\Delta+1}$.

Sinon, $\chi(G) \leq \Delta$.

Preuve (Lovász - 1975)

\Leftarrow :

- ▶ Si $\Delta = 2$ et une composante connexe de G est un cycle impair, alors $\chi(G) = 3 = \Delta + 1$.
- ▶ si $\Delta \neq 2$ et G contient une composante connexe isomorphe à $K_{\Delta+1}$, alors $\chi(G) = \Delta + 1$.

Théorème de Brooks - 1941

Preuve (Lovász - 1975) - suite

⇒ :

On va montrer la contraposé, c'est à dire que si $\Delta = 2$ et G ne contient pas de composante connexe qui soit un cycle impair, ou si $\Delta \neq 2$ et G ne contient pas de composante connexe qui soit une clique de taille $\Delta + 1$, alors G est Δ -coloriable.

- ▶ Il suffit de le montrer pour G connexe. En effet, si pour toute composante connexe C de G , on a $\chi(C) \leq \Delta(C)$, alors $\chi(G) \leq \max\{\Delta(C), C \text{ composante connexe de } G\} \leq \Delta(G)$

Théorème de Brooks - 1941

Preuve (Lovász - 1975) - suite

⇒ :

- ▶ Il suffit de le montrer pour G 2-connexe. En effet, si pour toute composante biconnexe B de G , on a $\chi(B) \leq \Delta(B)$, alors $\chi(G) \leq \max\{\Delta(B), B \text{ composante biconnexe de } G\} \leq \Delta(G)$.

Il suffit de colorier les composantes biconnexes de G , puis de les assembler une à une en permutant les couleurs de façon à ce que les couleurs associées aux points d'articulation coïncident.

- ▶ Il suffit de le montrer pour G Δ -régulier. En effet, on peut construire un graphe G' Δ -régulier $\neq K_{\Delta+1}$ à partir de G en rajoutant des arêtes et si besoin des sommets. La Δ -coloration de G' sera également une Δ -coloration de G après suppression des arêtes et des sommets rajoutés.

Preuve (Lovász - 1975) - suite

⇒ :

- ▶ Il suffit de le montrer pour $\Delta \geq 3$ car si $\Delta = 2$, alors G est un cycle pair et donc $\chi(G) = 2$.

Lemme : On va montrer qu'il existe dans G 3 sommets x_1, x_2 et x_n tels que :

- ▶ $x_1x_2 \notin E$;
- ▶ $x_1x_n \in E$ et $x_2x_n \in E$;
- ▶ $G \setminus \{x_1, x_2\}$ est connexe.

Théorème de Brooks - 1941

Preuve (Lovász - 1975) - suite

Preuve :

Montrons tout d'abord qu'il existe 3 sommets u, v et w tels que :

- ▶ $uv \notin E$;
- ▶ $uw \in E$ et $vw \in E$;

Comme G n'est pas complet, il existe deux sommets a et b tels que $ab \notin E$. Comme G est connexe, il existe une chaîne reliant a et b , disons $a = v_1, v_2, \dots, v_p = b$. Soit i la plus grande valeur telle que v_i soit relié à a . On prend $u = a$, $v = v_{i+1}$ et $w = v_i$.

Théorème de Brooks - 1941

Preuve (Lovász - 1975) - suite

Supposons maintenant que $G \setminus \{u\}$ soit 2-connexe. Alors $G \setminus \{u, v\}$ est connexe. Donc $x_1 = u, x_2 = v, x_n = w$ répondent aux conditions du Lemme.

Sinon, $G \setminus \{u\}$ contient des points d'articulation. Soit z l'un de ces points d'articulation. $G \setminus \{u, z\}$ possède au moins deux composantes connexes. Soit C_1, \dots, C_k ces composantes connexes. Ces composantes connexes sont elles mêmes composées de composantes biconnexes reliées par des points d'articulation et formant dans $G \setminus \{u\}$ un arbre dont z sera considéré comme la racine.

u possède un arête vers chacune des feuilles de cet arbre car G est 2-connexe et donc $G \setminus \{z\}$ est connexe.

Théorème de Brooks - 1941

Preuve (Lovász - 1975) - suite

On prend pour x_1 le sommet voisin de u situé dans la feuille de C_1 et pour x_2 le sommet voisin de u situé dans la feuille de C_2 .

$x_1x_2 \notin E$ car C_1 et C_2 ne sont pas reliées dans $G \setminus \{u, z\}$. On prend $x_n = u$. On a bien $x_1x_n \in E$ et $x_2x_n \in E$.

Comme x_1 et x_2 ont été pris dans des composantes biconnexes différentes de $G \setminus \{u\}$, $G \setminus \{u, x_1, x_2\}$ est connexe. De plus, comme u est de degré ≥ 3 , u possède un voisin différent de x_1 et x_2 dans G et donc $G \setminus \{x_1, x_2\}$ est connexe.

Théorème de Brooks - 1941

Preuve (Lovász - 1975) - suite

Fin de la preuve On numérote les sommets de G en prenant comme dernier sommet x_n . On prend comme sommet x_{n-1} un voisin de x_n différent de x_1 et x_2 , puis comme sommet x_{n-2} un voisin de x_n ou x_{n-1} différent de x_1 et x_2 ...

On colorie ensuite les sommets à l'aide de l'algorithme First-Fit. x_1 et x_2 auront tous les deux la couleur 1. Les sommets suivants auront tous un voisin d'indice supérieur non encore colorié et pourront donc être colorié par une couleur $\leq \Delta$. Pour finir, x_n aura deux voisins de la même couleur (x_1 et x_2) et pourra donc également être colorié par une couleur $\leq \Delta$.