Masters Informatique et MIMSE
Université de Bordeaux
J1IN8W15 – Graphes et Recherche Opérationnelle

Feuille 4 - Graphes triangulés

Exercice 1

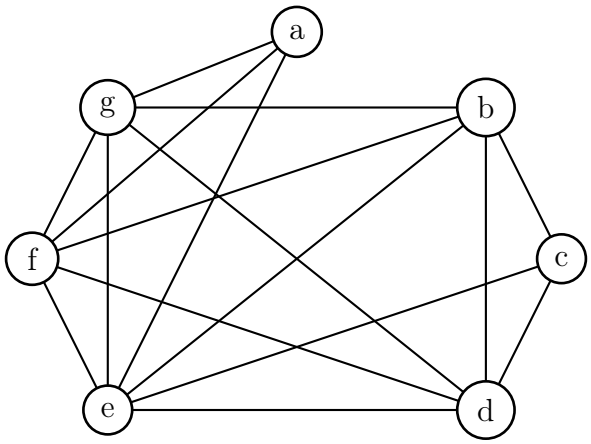

FIGURE 1 – Graphe G

1. Faire tourner l'algorithme LexBFS sur le graphe G de la figure 1, à partir du sommet f. En cas de choix lors de l'étape de sélection, on prendra le sommet dont le nom est le plus grand dans l'ordre alphabétique.
2. G est-il triangulé ? Justifier votre réponse.
3. G est-il un graphe d'intervalle ? Justifier votre réponse et si oui, donner un ensemble d'intervalles correspondant à G.

Exercice 2

Dans un hôpital, les soucis d'économie incitent à minimiser le nombre de réfrigérateurs nécessaires pour stocker les vaccins. Voici la liste des vaccins à stocker :

Vaccin	**Température de conservation**
Rougeole-Rubéole-Oreillons	4..12°
BCG	8..15°
Di-Te-Per	0..20°
Polio	2..3°
Hépatite B	−3..6°
Amarile	−10..10°
Variole	6..20°
Varicelle	−5..2°
Haemophilus	−2..8°

On supposera qu'un vaccin ne peut-être conservé dans un réfrigérateur dont la température est réglée sur une extrémité de l'intervalle de conservation.

1. Donner le graphe d'intervalles associé.

2. Combien faut-il de réfrigérateurs ? Sur quelle température faut-il les régler ?

Exercice 3

Un graphe $G = ([1..n], E)$ est un graphe de permutation s'il existe une permutation π des sommets telle que x est adjacent à y si et seulement si $x < y$ et $\pi(y) < \pi(x)$ ou $y < x$ et $\pi(x) < \pi(y)$.

1. Dessiner les graphes associés aux permutations 25143, 34152, 12345 et 54321.
2. Montrer que les graphes de permutation sont des graphes de comparabilité.
3. Montrer que G est un graphe de permutation si et seulement si G et $\overline{G}$ sont des graphes de comparabilité.

Exercice 4

On rappelle qu'un cocycle élémentaire est un ensemble d'arêtes reliant deux ensembles de sommets A_1 et A_2, engendrant des sous-graphes connexes, avec $A_1 \neq \emptyset$, $A_2 \neq \emptyset$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ et le sous-graphe induit par $A_1 \cup A_2$ est une composante connexe du graphe.

Un cocircuit élémentaire est un cocycle élémentaire entre deux ensembles A_1 et A_2 dans un graphe orienté où tous les arcs sont orientés dans le même sens, c'est à dire soit de A_1 vers A_2, soit de A_2 vers A_1.

Le but de cet exercice est de montrer le lemme "des arcs colorés" (Minty).

Soit G un graphe orienté sans boucle ni arc multiple. Les arcs sont numérotés de 1 à m et colorés en vert, rouge ou noir. L'arc 1, noté ba est coloré en noir.

On fait le marquage suivant sur les sommets du graphe :
a) on marque le sommet a, extrémité terminale de l'arc 1 ;
b) si x est un sommet déjà marqué, et y un sommet non marqué, on marque y dans les cas suivants :
- il existe un arc noir de x à y ;
- il existe un arc rouge de x à y ou de y vers x.
Cette procédure est appliquée jusqu'à ce qu'on ne puisse plus marquer de sommet.

1. Montrer qu'une des propriétés suivantes est vérifiée :
   – il passe par l'arc 1 un cycle élémentaire uniquement rouge et noir avec tous les arcs noirs orientés dans le même sens ;
   – il passe par l'arc 1 un cocyle élémentaire uniquement vert et noir avec tous les arcs noirs orientés dans le même sens.
2. En déduire que dans un graphe orienté sans boucle ni arc multiple, tout arc appartient exclusivement soit à un circuit élémentaire, soit à un cocircuit élémentaire.
3. Montrer que dans un graphe orienté sans boucle ni arc multiple et fortement connexe, tout arc appartient à un circuit.