

### Feuille 3 - Graphes bipartis

#### Exercice 1

On note  $\Delta(G)$  le degré maximum d'un graphe  $G$  et  $\chi'(G)$  son indice chromatique. Le but de cet exercice est de montrer le théorème de König (1916) :

**Tout graphe biparti  $G$  vérifie  $\chi'(G) = \Delta(G)$ .**

1. Montrer que pour tout graphe  $G$ ,  $\chi'(G) \geq \Delta(G)$ .
2. On montre la proposition par induction sur le nombre d'arêtes du graphe  $G$ . Pour  $m(G) = 0$ , la proposition est vraie. Supposons  $G$  biparti, avec  $m(G) = m \geq 1$  et la propriété vraie pour tout graphe biparti ayant au plus  $m - 1$  arêtes.
  - (a) Soit  $e = xy \in E(G)$ . Par hypothèse,  $G' = G \setminus e$  possède une coloration propre des arêtes avec  $\Delta = \Delta(G)$  couleurs. Si  $\alpha$  est une couleur utilisée, on appelle  $\alpha$ -arêtes les arêtes coloriées  $\alpha$ . Montrer qu'il existe deux couleurs  $\alpha$  et  $\beta$  telles que  $x$  n'est pas incident dans  $G'$  à une  $\alpha$ -arête et  $y$  n'est pas incident dans  $G'$  à une  $\beta$ -arête.
  - (b) Peut-on conclure si  $\alpha = \beta$  ?
  - (c) Si  $\alpha \neq \beta$  et  $x$  est incident à une  $\beta$ -arête dans  $G'$ , on considère une chaîne commençant en  $x$  coloriée alternativement  $\beta, \alpha$ . Cette chaîne peut-elle passer par  $y$  ?
  - (d) Terminer la preuve.

#### Exercice 2

Si  $G$  est un graphe biparti et  $S$  un sous-ensemble de  $V(G)$ ,  $\Gamma(S)$  désigne l'ensemble des sommets voisins d'au moins un sommet de l'ensemble  $S$ . On désignera un graphe biparti par le couple  $(V_1 \cup V_2, E)$ , où  $V_1$  et  $V_2$  induisent tous les deux des stables, et par  $n_1(G)$  et  $n_2(G)$  les cardinaux respectifs des ensembles  $V_1$  et  $V_2$ .

On rappelle le théorème de Hall, qui peut se démontrer en utilisant les flots :

*Un graphe biparti  $G = (V_1 \cup V_2, E)$  contient un couplage de taille  $n_1(G)$  si et seulement si*

$$\forall S \subseteq V_1, |\Gamma(S)| \geq |S|$$

1. Montrer que si un graphe biparti  $G = (V_1 \cup V_2, E)$  vérifie :

$$\forall S \subseteq V_1, |\Gamma(S)| \geq |S| - d$$

alors  $G$  contient  $n_1(G) - d$  arêtes indépendantes.

2. Soit  $G = (V_1 \cup V_2, E)$  un graphe biparti,
  - $h$ , le nombre maximum d'arêtes indépendantes de  $G$  ;
  - $j$ , le nombre minimum de sommets et d'arêtes couvrants tous les sommets.

Montrer que :

$$\alpha(G) = j = n(G) - h$$

#### Exercice 3

Soit  $G$  un graphe biparti. Montrer que  $G$  et  $\overline{G}$  sont parfaits.