Masters Informatique et MIMSE
Université de Bordeaux
J1IN8W15 – Graphes et Recherche Opérationnelle

Feuille 2 - Graphes planaires

Un graphe *planaire* est un graphe que l'on peut dessiner dans le plan de telle sorte que les arêtes ne se croisent pas.

Soit G un graphe. On note par $d_G(x)$ le degré d'un sommet x de G, ou plus simplement par $d(x)$ s'il n'y a pas d'ambiguité.

On rappelle que si n est le nombre de sommets d'un graphe G planaire connexe, m son nombre d'arêtes et f son nombre de faces dans une représentation dans le plan, on a la **formule d'Euler** :

$$n - m + f = 2$$

La longueur d'une face est le nombre d'arêtes qui la délimitent.

1. Vérifier la formule d'Euler et donner la longueur des faces du graphe de la figure 1.

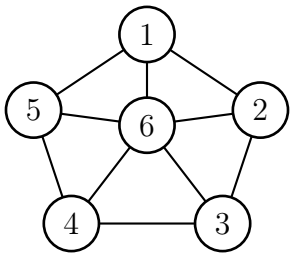

FIGURE 1 – Graphe planaire W

2. Montrer que si G est un graphe planaire simple sans sommet pendant (c'est à dire de degré 1), la somme des longueurs des faces est égale à deux fois le nombre d'arêtes du graphe.
3. Montrer que si G est un graphe planaire simple, ayant au moins 3 sommets, alors $m(G) \leq 3n(G) - 6$.
4. En déduire que tout graphe planaire simple possède au moins un sommet de degré inférieur ou égal à 5.
5. Quel est le nombre chromatique du graphe W de la figure 1 ?
6. Montrer que tout graphe planaire simple est 6-coloriable.
7. On veut maintenant montrer que tout graphe planaire est 5-coloriable (théorème de Heawood - 1890). Pour cela, on considère un graphe G contre-exemple minimal, c'est à dire que si on enlève un sommet de G, le graphe obtenu est 5-coloriable.
   (a) Montrer que G ne possède pas de sommet de degré inférieur ou égal à 4.
   On suppose donc que G ne possède aucun sommet de degré strictement inférieur à 5. Soit x tel que $d(x) = 5$. On suppose sans perte de généralité que les voisins de x sont, pour un dessin plan donné de G, dans l'ordre cyclique x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 (voir figure 2). Soit H le sous-graphe de G induit par $V(G)\backslash\{x\}$. H est donc 5-coloriable.
   (b) Montrer que les sommets x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 sont tous de couleur différente.

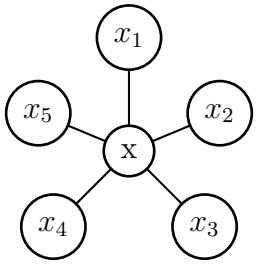

FIGURE 2 – Voisins de x

(c) On suppose toujours sans perte de généralité que chaque sommet x_i parmi x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 est de couleur i et on note par $H(i, j)$ le sous-graphe de H induit par les sommets coloriés i ou j. Montrer que deux sommets x_i, x_j appartiennent toujours à la même composante connexe de $H(i, j)$.

(d) En déduire que x_1 et x_3 sont reliés par une chaîne de sommets coloriés 1 et 3 et x_2, x_4 par une chaîne coloriée 2 et 4. Tracer ces chaînes sur la figure 2. Qu'en concluez-vous ?