

Examen du 21 avril 2015, durée 1h30
Aucun document autorisé

Traiter les deux exercices sur deux feuilles séparées

Exercice 1

1. Graphes triangulés et d'intervalles

- (a) Appliquer l'algorithme LexBFS au graphe de la figure 1 à partir du sommet s . Le graphe de la figure 1 est-il triangulé? Justifier votre réponse.

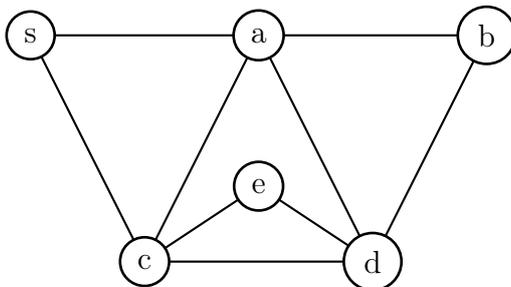


FIGURE 1 – Graphe G

- (b) Le graphe de la figure 1 est-il un graphe d'intervalles? Justifier votre réponse.

2. Graphes imparfaits minimaux

Soit G un graphe. On note $V(G)$ l'ensemble de ses sommets, $\omega(G)$ le cardinal maximum d'une clique de G , $\alpha(G)$ le cardinal maximum d'un stable de G , $\chi(G)$ son nombre chromatique et $\kappa(G)$ le nombre minimum de cliques nécessaire pour couvrir $V(G)$.

- (a) Rappeler la définition d'un graphe parfait.
(b) Montrer que si G est un graphe parfait, alors pour tout H sous-graphe induit de G :

$$\omega(H)\alpha(H) \geq |V(H)|$$

On rappelle que cette condition est également suffisante pour qu'un graphe soit parfait. On rappelle également qu'un graphe est parfait si et seulement si son complémentaire est parfait (Lovász, 1972).

- (c) Donner une caractérisation des graphes parfaits utilisant α et κ .

Un graphe qui n'est pas parfait est dit *imparfait*. Un graphe G imparfait est *imparfait minimal* si tout H sous-graphe induit strict (ayant au moins un sommet de moins) de G est parfait.

- (d) On considère C_7 le cycle à 7 sommets et son complémentaire $\overline{C_7}$. Donner les valeurs de $\chi(C_7)$, $\chi(\overline{C_7})$, $\omega(C_7)$ et $\omega(\overline{C_7})$. C_7 et $\overline{C_7}$ sont-ils imparfaits minimaux? Justifiez votre réponse.

- (e) Soit G un graphe imparfait minimal et x un sommet de G . $G - x$ désigne le sous-graphe de G induit par $V(G) \setminus \{x\}$. Quelles sont les relations, en termes d'égalités, entre :
- $\chi(G)$, $\chi(G - x)$, $\omega(G)$ et $\omega(G - x)$?
 - $\kappa(G)$, $\kappa(G - x)$, $\alpha(G)$ et $\alpha(G - x)$?
- (f) Soit S un ensemble stable d'un graphe G imparfait minimal et $G - S$ le sous-graphe de G induit par $V(G) \setminus S$. Montrer que $\omega(G - S) = \omega(G)$ (indication : on montrera que pour tout graphe G , $\chi(G - S) \geq \chi(G) - 1$).
- (g) Soit G un graphe minimal imparfait avec $n = |V(G)|$, $\alpha = \alpha(G)$ et $\omega = \omega(G)$.
- i. Montrer que $n = \alpha\omega + 1$ (indication : utiliser les égalités de la question 2e).
 - ii. Montrer que pour tout sommet x de G , $G \setminus x$ admet une partition de l'ensemble de ses sommets en ω stables de taille α .
 - iii. Montrer que pour tout sommet x de G , $G \setminus x$ admet une partition de l'ensemble de ses sommets en α cliques de taille ω .
 - iv. Montrer que G contient $n (= \alpha\omega + 1)$ ensembles stables maximums S_1, \dots, S_n et n cliques maximums C_1, \dots, C_n tels que :
 - A. chaque sommet de G appartient à exactement α stables S_i .
 - B. chaque sommet de G appartient à exactement ω cliques C_i .
 - C. $C_i \cap S_i = \emptyset$, pour tout i , $1 \leq i \leq n$
 - D. $|C_i \cap S_j| = 1$, pour tout i, j , $1 \leq i < j \leq n$

Exercice 2

On considère un graphe non orienté $G = (V, E)$, connexe, simple (sans boucle ni arête multiple). Le graphe est muni d'une fonction de coût, on note $c(e_{i,j})$ le coût de l'arête entre les sommets i et j et on note $\mathcal{C}(G) = \sum_{e \in E} c(e)$. On note $\gamma_{i,j}$ une chaîne joignant les sommets i et j , $p(\gamma_{i,j}) = \sum_{e \in \gamma_{i,j}} c(e)$,

$p_{i,j}$ désigne le coût **minimum** d'une chaîne entre les sommets i et j . On cherche $G' = (V, E')$ graphe partiel connexe de G tel que pour tout couple de sommets (i, j) , il existe une chaîne $\gamma'_{i,j}$ dans G' avec $p(\gamma'_{i,j}) = p_{i,j}$ et tel que $\text{card}(E')$ soit minimum.

On prendra pour exemple le graphe G suivant décrit par sa matrice de coût :

$$\begin{pmatrix} & A & B & C & D & E & F \\ A & - & 8 & - & 6 & - & 3 \\ B & 8 & - & 2 & 5 & 2 & - \\ C & - & 2 & - & - & 5 & 8 \\ D & 6 & 5 & - & - & 2 & 1 \\ E & - & 2 & 5 & 2 & - & 2 \\ F & 3 & - & 8 & 1 & 2 & - \end{pmatrix}$$

1. Montrez que l'arbre de poids minimum obtenu par Prim ou Kruskal ne correspond qu'imparfaitement à la résolution du problème (appuyez vous sur le graphe exemple) ;
2. On veut faire une résolution par Tabou :
 - (a) Quelle est la fonction à optimiser ? (justifiez votre choix)
 - (b) Proposez un voisinage et donnez le mouvement élémentaire,
 - (c) Quelle est la taille d'un voisinage ?
 - (d) A-t-on la couverture de l'espace de recherche ?
 - (e) Quelle est la complexité en fonction de G de Δ_f la variation de la fonction à optimiser ?
3. En utilisant votre voisinage, une descente de gradient garantit-elle de trouver une solution optimale au problème ?
4. Existe-t-il un algorithme classique permettant de résoudre le problème de manière optimale ?