

Examen du 21 avril 2015, durée 1h30
Aucun document autorisé

Traiter les deux exercices sur deux feuilles séparées

Exercice 1

1. Graphes triangulés et d'intervalles

- (a) Appliquer l'algorithme LexBFS au graphe de la figure 1 à partir du sommet s . Le graphe de la figure 1 est-il triangulé? Justifier votre réponse.

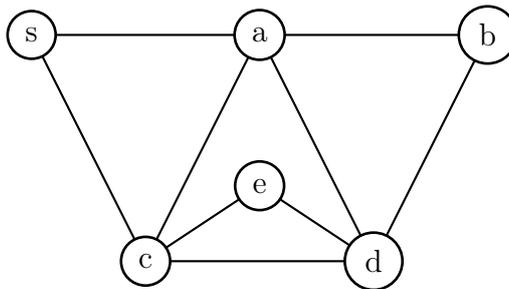


FIGURE 1 – Graphe G

Exécution de LexBFS

sommet choisi	s	a	b	c	d	e
s	X	6		6		
a		X	5	65	5	
c				X	54	4
d			53		X	43
b			X			
e						X

L'ordre obtenu par LexBFS est e, b, d, c, a, s . Lorsque l'on élimine chaque sommet dans cet ordre, leurs voisinages dans le graphe restant sont :

- $e : c, d \rightarrow K_2$
- $b : a, d \rightarrow K_2$
- $d : a, c \rightarrow K_2$
- $c : s, a \rightarrow K_2$
- $a : s \rightarrow K_1$
- $s : \emptyset$

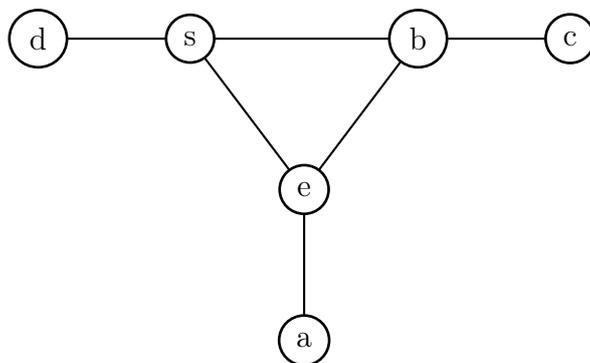


FIGURE 2 – Graphe \overline{G}

Dans tous les cas, ces voisinages sont des cliques, donc l'ordre obtenu par LexBFS est bien simplicial et donc le graphe est triangulé.

- (b) Le graphe de la figure 1 est-il un graphe d'intervalles ? Justifier votre réponse.

Le graphe complémentaire du graphe de la figure 1 est donné par la figure 2. Ce graphe n'admet pas d'orientation transitive.

En effet, on peut choisir arbitrairement l'orientation d'une première arête. On oriente donc $\{d, s\}$ de d vers s . On a alors la suite des orientations suivantes pour préserver la transitivité de l'orientation :

$ds \Rightarrow bs$ et es .

$bs \Rightarrow bc$.

$es \Rightarrow ea$.

Mais si on oriente $\{e, b\}$ de e vers b , on doit avoir un arc de e vers c , ce qui est impossible. Et si on oriente $\{e, b\}$ de b vers e , on doit avoir un arc de b vers a , ce qui est également impossible. Donc \overline{G} n'a pas d'orientation transitive et donc G n'est pas un graphe d'intervalles.

2. Graphes imparfaits minimaux

- (a) Rappeler la définition d'un graphe parfait.

Un graphe G est parfait si et seulement pour tout sous-graphe H induit de G , on a $\chi(H) = \omega(H)$.

- (b) Montrer que si G est un graphe parfait, alors pour tout H sous-graphe induit de G :

$$\omega(H)\alpha(H) \geq |V(H)|$$

Dans une coloration de H , chaque classe de couleur contient au plus $\alpha(H)$ sommets. C'est en particulier vrai pour une coloration optimale avec $\chi(H)$ couleurs. Donc $|V(H)| \leq \chi(H)\alpha(H)$.

Comme G est parfait $\chi(H)\alpha(H) = \omega(H)\alpha(H)$. Donc $|V(H)| \leq \omega(H)\alpha(H)$.

On rappelle que cette condition est également suffisante pour qu'un graphe soit parfait. On rappelle également qu'un graphe est parfait si et seulement si son complémentaire est parfait (Lovász, 1972).

- (c) Donner une caractérisation des graphes parfaits utilisant α et κ .

Un graphe G est parfait si et seulement si son complémentaire \overline{G} est parfait.

Donc un graphe G est parfait si et seulement si pour tout sous-graphe induit H de \overline{G} , $\chi(H) = \omega(H)$.

Donc un graphe G est parfait si et seulement si pour tout sous-graphe induit H de (G) , $\kappa(H) = \alpha(H)$.

Un graphe qui n'est pas parfait est dit *imparfait*. Un graphe G imparfait est *imparfait minimal* si tout H sous-graphe induit strict (ayant au moins un sommet de moins) de G est parfait.

- (d) On considère C_7 le cycle à 7 sommets et son complémentaire $\overline{C_7}$. Donner les valeurs de $\chi(C_7)$, $\chi(\overline{C_7})$, $\omega(C_7)$ et $\omega(\overline{C_7})$. C_7 et $\overline{C_7}$ sont-ils imparfaits minimaux? Justifiez votre réponse.

$$\chi(C_7) = 3, \omega(C_7) = 2$$

$$\chi(\overline{C_7}) = 4, \omega(\overline{C_7}) = 3.$$

Donc C_7 et $\overline{C_7}$ ne sont pas parfaits.

Pour tout sommet x de C_7 , $C_7 - x = P_6$ et les chaînes sont des graphes parfaits. Donc C_7 est imparfait minimal.

De même $\overline{C_7} - x = \overline{P_6}$ et le complémentaire d'une chaîne est le complémentaire d'un graphe parfait, donc parfait également. Donc $\overline{C_7}$ est imparfait minimal.

- (e) Soit G un graphe imparfait minimal et x un sommet de G . $G - x$ désigne le sous-graphe de G induit par $V(G) \setminus \{x\}$. Quelles sont les relations, en termes d'égalités, entre :

$$- \chi(G), \chi(G - x), \omega(G) \text{ et } \omega(G - x)?$$

$$- \kappa(G), \kappa(G - x), \alpha(G) \text{ et } \alpha(G - x)?$$

Pour tout graphe G et tout sommet x de G , $\chi(G - x) \leq \chi(G) \leq \chi(G - x) + 1$ et $\omega(G - x) \leq \omega(G) \leq \omega(G - x) + 1$.

Comme G est imparfait minimal, $\chi(G) > \omega(G)$ et $\chi(G - x) = \omega(G - x)$

On obtient donc $\chi(G - x) = \omega(G) = \omega(G - x)$ et

$$\chi(G) = \chi(G - x) + 1 = \omega(G) + 1 = \omega(G - x) + 1.$$

De même, $\kappa(G - x) = \alpha(G) = \alpha(G - x)$ et

$$\kappa(G) = \kappa(G - x) + 1 = \alpha(G) + 1 = \alpha(G - x) + 1.$$

- (f) Soit S un ensemble stable d'un graphe G imparfait minimal et $G - S$ le sous-graphe de G induit par $V(G) \setminus S$. Montrer que $\omega(G - S) = \omega(G)$ (indication : on montrera que pour tout graphe G , $\chi(G - S) \geq \chi(G) - 1$).

Pour tout graphe G et S un stable de G , $\chi(G) \leq \chi(G - S) + 1$ et donc $\chi(G - S) \geq \chi(G) - 1$.

Comme G est imparfait minimal, et d'après la question précédente, $\chi(G) - 1 = \omega(G)$.

Donc $\chi(G - S) \geq \omega(G)$. Mais comme $G - S$ est parfait, $\chi(G - S) = \omega(G - S)$ et comme $\omega(G - S) \leq \omega(G)$, la seule possibilité est donc que $\chi(G - S) = \omega(G - S) = \omega(G)$.

- (g) Soit G un graphe minimal imparfait avec $n = |V(G)|$, $\alpha = \alpha(G)$ et $\omega = \omega(G)$.

- i. Montrer que $n = \alpha\omega + 1$ (indication : utiliser les égalités de la question 2e).

Si $n \leq \alpha\omega$, alors G est parfait d'après le théorème de Lovász rappelé à la question 2b.

Donc $n > \alpha\omega$.

Pour tout sommet x , on a $n - 1 \leq \alpha(G - x)\omega(G - x)$.

En utilisant les égalités de la question 2e, on a donc $n - 1 \leq \alpha(G)\omega(G) < n$.

Donc $\alpha\omega = n - 1$ et donc $n = \alpha\omega + 1$.

- ii. Montrer que pour tout sommet x de G , $G \setminus x$ admet une partition de l'ensemble de ses sommets en ω stables de taille α .

On a $\chi(G - x) = \omega$, $\alpha(G - x) = \alpha$, et $n - 1 = \omega\alpha$. Par conséquent, toute coloration optimale de $G - x$ est composée de ω classes de couleurs de taille α .

- iii. Montrer que pour tout sommet x de G , $G \setminus x$ admet une partition de l'ensemble de ses sommets en α cliques de taille ω .

On a $\kappa(G - x) = \alpha$, $\omega(G - x) = \omega$, et $n - 1 = \omega\alpha$. Par conséquent, toute décomposition de $G - x$ en un nombre minimum de cliques est composée de α cliques de taille ω .

- iv. Montrer que G contient n ($= \alpha\omega + 1$) ensembles stables maximums S_1, \dots, S_n et n cliques maximums C_1, \dots, C_n tels que :

A. chaque sommet de G appartient à exactement α stables S_i .

B. chaque sommet de G appartient à exactement ω cliques C_i .

C. $C_i \cap S_i = \emptyset$, pour tout i , $1 \leq i \leq n$

D. $|C_i \cap S_j| = 1$, pour tout i, j , $1 \leq i < j \leq n$

Soit S_0 un stable de G de taille α . Soit $v \in S_0$. Le graphe $G - v$ est parfait, et on peut le décomposer en une famille de ω stables de taille α . On note \mathcal{S}_v cette famille. On note $\{\cup \mathcal{S}_v, v \in S_0\}$ par $\{S_1, \dots, S_{\alpha\omega}\}$. On peut voir que $\{S_0, S_1, \dots, S_{\alpha\omega}\}$ est une famille de $\alpha\omega + 1$ stables satisfaisant la propriété A.

Par la propriété (f), on a $\omega(G - S_i) = \omega$ pour tout $i, 0 \leq i \leq \alpha\omega$. Par conséquent, il existe une clique maximum C_i qui est disjointe de S_i . Comme chacun des sommets de C_i est dans α stables de $\{S_0, S_1, \dots, S_{\alpha\omega}\}$, et comme deux sommets de C_i ne peuvent appartenir à un même stable, $|C_i \cap S_j| = 1$ pour $0 \leq i < j \leq \alpha\omega$.