université de BORDEAUX

Masters Info et MIMSE

J1IN8W15 – Graphes et Recherche Opérationnelle
Aucun document autorisé

Devoir Surveillé du 15 mars 2016, durée 1h30

Exercice 1

Soit G le graphe de la figure 1.

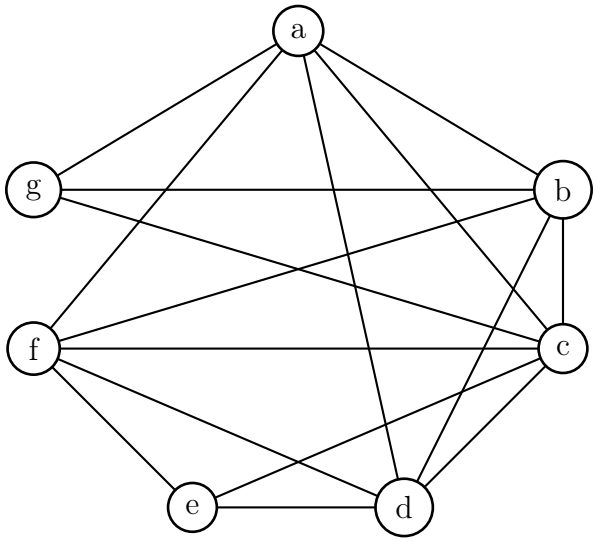

FIGURE 1 – Graphe G

1. Faire tourner l'algorithme LexBFS sur le graphe G à partir du sommet a. Si on a le choix dans la sélection des sommets, on choisira le premier dans l'ordre alphabétique.
2. Le graphe G est-il un graphe triangulé ?
3. Le graphe G est-il un graphe d'intervalles ? Si oui, représenter les intervalles.

Exercice 2

On rappelle que $\omega(G)$ désigne le cardinal maximum d'une clique d'un graphe G et $\chi(G)$ son nombre chromatique.

1. Montrer que dans un graphe G, si $\chi(G) = \omega(G)$ alors il existe un ensemble I de sommets indépendants (c'est à dire formant un stable) tel que $\omega(G \backslash I) < \omega(G)$.
2. Soit un graphe G tel que pour tout sous-graphe strict H (c'est à dire ayant au moins un sommet de moins que G), $\chi(H) = \omega(H)$. Montrer que si $\chi(G) > \omega(G)$, alors pour tout ensemble stable I, $\omega(G \backslash I) = \omega(G)$.
3. En déduire que G est un graphe parfait si et seulement si quelque soit H sous-graphe induit de G, il existe un ensemble stable I tel que $\omega(H \backslash I) < \omega(H)$.

Exercice 3

On considère dans cette exercice uniquement des graphes simples, c'est à dire non orientés, sans boucle, ni arête multiple. $V(G)$ désigne l'ensemble des sommets d'un graphe G, $E(G)$ l'ensemble de ses arêtes.

Une k-coloration d'un graphe G est une application de $V(G)$ dans $\{1, \ldots, k\}$.

Une coloration c est dite *propre* si et seulement si pour toute paire de sommets voisins de G $\{x, y\}$, on a $c(x) \neq c(y)$.

Un coloration d'un graphe G est dite *injective* si et seulement si pour tout sommet v du graphe, les voisins de v sont tous de couleurs différentes.

Attention ! ! ! Une coloration injective n'est pas forcément une coloration propre, et inversement. Par exemple, dans la figure 2, la coloration de gauche est injective et non propre (il existe deux sommets voisins de couleur 1), alors que celle de droite est propre, mais pas injective (le sommet du milieu a ses deux voisins de la même couleur).

FIGURE 2 – Colorations respectivement injective et propre de P_3

On note par $\chi(G)$ le nombre chromatique du graphe G, c'est à dire le plus petit entier k tel que G possède une k-coloration propre. De même, $\chi_i(G)$ désigne le nombre chromatique injectif de G, c'est à dire le plus petit entier k tel que G possède une k-coloration injective.

K_n désigne le graphe complet à n sommets, C_n le cycle à n sommets, et P_n la chaîne à n sommets.

1. Quel est le nombre chromatique injectif de K_2, K_3 et C_4 ? On dessinera chacun de ces graphes avec une coloration injective optimale.
2. Soit S_p, $p \geq 1$, le graphe composé d'un sommet x incident à p arêtes. Ce graphe est appelé une *étoile*. Quelles sont les valeurs de $\chi(S_p)$ et $\chi_i(S_p)$?
3. Soit G un graphe simple. Donner une borne inférieure de $\chi_i(G)$ en fonction du degré maximum $\Delta(G)$ du graphe. Justifier votre réponse.

   Soit un graphe simple G. On note $G^{(2)}$ le graphe défini par $V(G^{(2)}) = V(G)$ et si x et y sont deux sommets de $V(G^{(2)})$, xy est une arête de $G^{(2)}$ si et seulement si il existe une chaîne de longueur 2 entre x et y dans G.
4. Dessiner le graphe $S_5^{(2)}$.
5. Montrer que pour tout graphe G, $\chi_i(G) = \chi(G^{(2)})$.
6. Soit $n \geq 2$. Donner $\chi(P_n)$. Calculer $\chi_i(P_n)$. Justifier votre réponse.
7. Montrer que $\chi_i(C_{2n+1}) = \chi(C_{2n+1})$.
8. Soit G une graphe connexe ayant au moins 3 sommets. Montrer que $\chi(G) \leq \chi_i(G)$.
9. Soit G un graphe de degré maximum Δ. Montrer que $\chi_i(G) \leq \Delta(\Delta - 1) + 1$.
10. On considère la grille 5×5 (5 lignes et 5 colonnes) de la figure 3. Peut-on trouver une coloration injective qui atteigne la borne inférieure de la question 3 ? Si oui, dessiner cette coloration. Peut-on généraliser cette coloration à une grille $n \times n$ pour un n quelconque ?

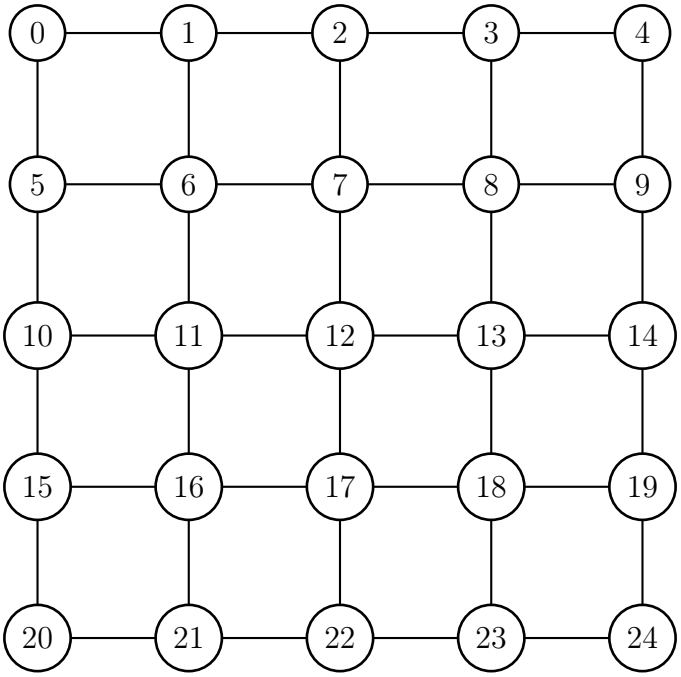

FIGURE 3 – Grille 5×5