université de BORDEAUX

Masters Info et MIMSE

J1IN8W15 – Graphes et Recherche Opérationnelle
Aucun document autorisé

Devoir Surveillé du 15 mars 2016, durée 1h30

Exercice 1

1. Faire tourner l'algorithme LexBFS sur le graphe G à partir du sommet a. Si on a le choix dans la sélection des sommets, on choisira le premier dans l'ordre alphabétique.
   Exécution de LexBFS

sommet choisi	a	b	c	d	e	f	g
a	X	7	7	7		7	7
b		X	76	76		76	76
c			X	765	5	765	765
d				X	54	7654	
f					543	X	
g							X
e					X		

2. Le graphe G est-il un graphe triangulé ?
   L'ordre d'élimination obtenu par LexBFS est e, g, f, d, c, b, a. Lorsque l'on élimine chaque sommet dans cet ordre, leurs voisinages dans le graphe restant sont :

   — $e : \{c, d, f\} \to K_3$
   — $g : \{a, b, c\} \to K_3$
   — $f : \{a, b, c, d\} \to K_4$
   — $d : \{a, b, c\} \to K_3$
   — $c : \{a, b\} \to K_2$
   — $b : \{a\} \to K_1$
   — $a : \emptyset$

   Dans tous les cas, ces voisinages sont des cliques, donc l'ordre obtenu par LexBFS est bien simplicial et donc le graphe est triangulé.

3. Le graphe G est-il un graphe d'intervalles ? Si oui, représenter les intervalles.
   Le graphe complémentaire du graphe G est donné par la figure 1. Ce graphe admet une orientation transitive. Par exemple ea, eb, eg, dg, fg.
   Les intervalles correspondant sont donnés par la figure 2.

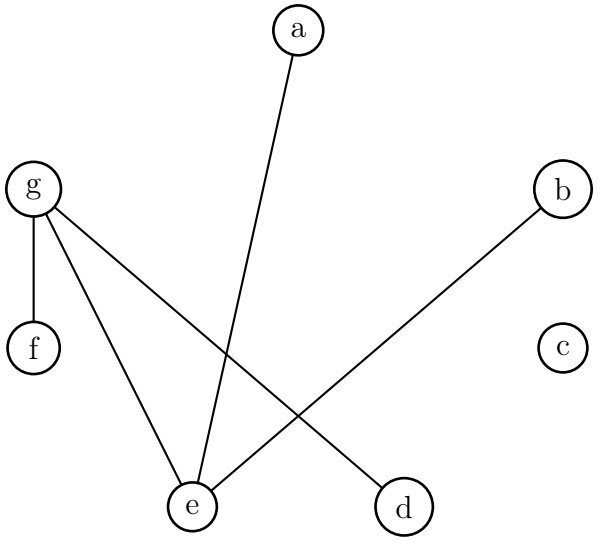

FIGURE 1 – Graphe $\overline{G}$

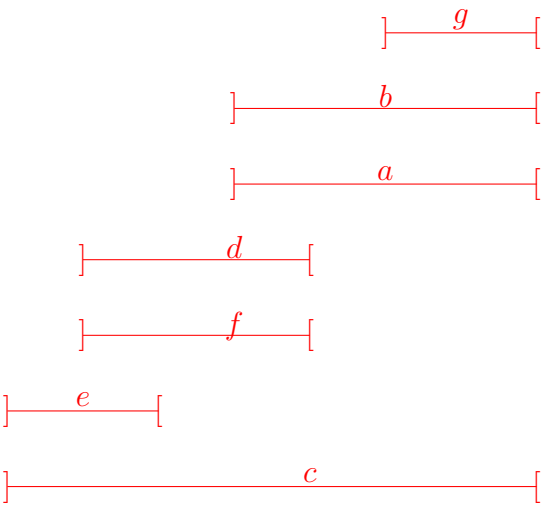

FIGURE 2 – Intervalles

Exercice 2

On rappelle que $\omega(G)$ désigne le cardinal maximum d'une clique d'un graphe G et $\chi(G)$ son nombre chromatique.

1. Montrer que dans un graphe G, si $\chi(G) = \omega(G)$ alors il existe un ensemble I de sommets indépendants (c'est à dire formant un stable) tel que $\omega(G \backslash I) < \omega(G)$.
   Toute clique contient au plus un sommet d'un même stable. Donc si $\chi(G) = \omega(G)$, toute clique maximum contient exactement un sommet dans chaque classe de couleur d'une coloration avec $\chi(G)$ couleurs. Donc si on considère une coloration avec $\chi(G)$ couleurs, et que l'on enlève une classe de couleur quelconque, on enlèvera 1 sommet à toutes les cliques de cardinalité $\omega(G)$. Les classes de couleur sont des stables. Donc il existe I, en prenant I étant n'importe quelle classe de couleur d'une coloration à $\chi(G)$ couleurs, tel que $\omega(G \backslash I) < \omega(G)$.
2. Soit un graphe G tel que pour tout sous-graphe strict H (c'est à dire ayant au moins un sommet de moins que G), $\chi(H) = \omega(H)$. Montrer que si $\chi(G) > \omega(G)$, alors pour tout ensemble stable I, $\omega(G \backslash I) = \omega(G)$.

Preuve par contradiction : supposons qu'il existe un stable I tel que $\omega(G\backslash I) < \omega(G)$. Comme en enlevant un stable, on diminue d'au plus 1 la taille de toute clique, on a donc $\omega(G\backslash I) = \omega(G) - 1$. Comme $\chi(G\backslash I) = \omega(G\backslash I)$ et $\chi(G) \leq \chi(G\backslash I) + 1$, on peut en déduire que $\chi(G) \leq \chi(G\backslash I) + 1 = \omega(G\backslash I) + 1 = \omega(G) - 1 + 1 = \omega(G)$. Donc $\chi(G) = \omega(G)$, ce qui est contraire aux hypothèses.

3. En déduire que G est un graphe parfait si et seulement si quelque soit H sous-graphe induit de G, il existe un ensemble stable I tel que $\omega(H\backslash I) < \omega(H)$.

   $\Rightarrow$

   Si G est parfait, alors pour tout sous-graphe induit H de G, $\chi(H) = \omega(H)$. Donc d'après la première question, pour tout sous-graphe induit H de G, il existe un stable I tel que $\omega(H\backslash I) < \omega(H)$.

   $\Leftarrow$

   Inversement, supposons que pour tout sous-graphe H de G, il existe un stable I tel que $\omega(H\backslash I) < \omega(H)$.

   Soit H un sous-graphe induit de G tel que tous ses sous-graphes induits stricts sont parfaits. Comme il existe un stable I tel que $\omega(H\backslash I) < \omega(H)$, d'après la question 2, on peut en déduire que $\chi(H) = \omega(H)$ et donc H est parfait.

   Donc par induction, G est parfait.

Exercice 3

1. Quel est le nombre chromatique injectif de K_2, K_3 et C_4 ? On dessinera chacun de ces graphes avec une coloration injective optimale.

   $\chi_i(K_2) = 1, \chi_i(K_3) = 3, \chi_i(C_4) = 2$. Les colorations sont données par les figures 3, 4 et 5 .

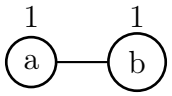

FIGURE 3 – Coloration injective de K_2

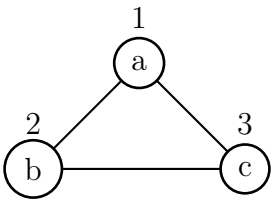

FIGURE 4 – Coloration injective de K_3

2. Soit S_p, $p \geq 1$, le graphe composé d'un sommet x incident à p arêtes. Ce graphe est appelé une *étoile*. Quelles sont les valeurs de $\chi(S_p)$ et $\chi_i(S_p)$?

   $\chi(S_p) = 2$ et $\chi_i(S_p) = p$.

3. Soit G un graphe simple. Donner une borne inférieure de $\chi_i(G)$ en fonction du degré maximum $\Delta(G)$ du graphe. Justifier votre réponse.

   $\chi_i(G) \geq \Delta(G)$. En effet tous les voisins d'un sommet de degré $\Delta(G)$ doivent avoir une couleur différente.

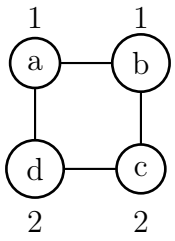

FIGURE 5 – Coloration injective de C_4

4. Dessiner le graphe $S_5^{(2)}$.
   Le graphe $S_5^{(2)}$ est composé d'une clique à 5 sommets (à partir des 5 sommets différents du centre de S_5) et d'un sommet isolé (le centre de l'étoile S_5). Voir figure 6.

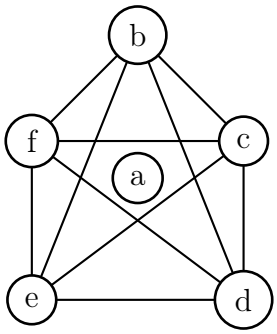

FIGURE 6 – Graphe $S_5^{(2)}$

5. Montrer que pour tout graphe G, $\chi_i(G) = \chi(G^{(2)})$.
   c est une coloration injective de G si et seulement si pour tout sommet u et toute paire v, w de sommets voisins de u, on a $c(v) \neq c(w)$.
   Or pour toute paire de sommets v, w de $V(G)$, vw est une arête de $G^{(2)}$ si et seulement si il existe une sommet u voisin de v et w dans G.
   Par conséquent, c est une coloration injective de G si et seulement c est une coloration propre de $G^{(2)}$. Et donc toute coloration injective d'un graphe G avec un nombre minimum de couleurs sera aussi un coloration propre de $G^{(2)}$ avec un nombre minimum de couleurs.
   Donc $\chi_i(G) = \chi(G^{(2)})$.
6. Soit $n \geq 2$. Donner $\chi(P_n)$. Calculer $\chi_i(P_n)$. Justifier votre réponse.
   $\chi(P_n) = 2$, $\chi_i(P_2) = 1$ et pour $n \geq 3$, $\chi_i(P_n) = 2$. En effet, $P_n^{(2)} = P_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + P_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$.
7. Montrer que $\chi_i(C_{2n+1}) = \chi(C_{2n+1})$.
   $C_{2n+1}^{(2)} = C_{2n+1}$. Donc $\chi_i(C_{2n+1}) = \chi(C_{2n+1}^{(2)}) = \chi(C_{2n+1})$.
8. Soit G une graphe connexe ayant au moins 3 sommets. Montrer que $\chi(G) \leq \chi_i(G)$.
   D'après le théorème de Brooks, $\chi(G) = \Delta(G)+1$ si et seulement si $G = K_n$ ou $G = C_{2k+1}$.
   Sinon $\chi(G) \leq \Delta(G)$
   D'après la question 3, $\chi_i(G) \geq \Delta(G)$. Donc si G n'est ni un graphe complet, ni un cycle impair, on a bien $\chi_i(G) \geq \chi(G)$.
   Si G est un cycle impair, $\chi_i(G) = \chi(G)$, d'après la question 7.
   De même, pour tout n, $K_n^{(2)} = K_n$. Donc $\chi_i(K_n) = \chi(K_n)$.
   Donc pour tout graphe G, on a bien $\chi_i(G) \geq \chi(G)$.

9. Soit G un graphe de degré maximum Δ. Montrer que $\chi_i(G) \leq \Delta(\Delta-1)+1$.
   Soit v un sommetde G. Le nombre de voisins de v est au plus Δ et chacun de ses voisins a au plus $\Delta-1$ voisins autres que v. Le nombre maximum de sommets ayant un voisin commun avec v est donc $\Delta \times (\Delta-1)$. Si on dispose de $\Delta \times (\Delta-1)+1$ couleurs, il sera donc toujours possible d'affecter une couleur à v. Donc $\chi_i(G) \leq \Delta(\Delta-1)+1$.

10. On considère la grille 5×5 (5 lignes et 5 colonnes) de la figure 7. Peut-on trouver une coloration injective qui atteigne la borne inférieure de la question 3 ? Si oui, dessiner cette coloration. Peut-on généraliser cette coloration à une grille $n \times n$ pour un n quelconque ?
    Oui, il est possible de colorier injectivement la grille 5×5 avec 4 couleurs : voir figure 7. Cette coloration peut être généralisée. Si on numérote les colonnes à partir de 0, il suffit de colorier chaque colonne
    - d'indice $\equiv 0 \bmod 4$, par le motif $1, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 2, \ldots$;
    - d'indice $\equiv 1 \bmod 4$, par le motif $3, 3, 4, 4, 3, 3, 4, 4, \ldots$;
    - d'indice $\equiv 2 \bmod 4$, par le motif $2, 2, 1, 1, 2, 2, 1, 1, \ldots$;
    - d'indice $\equiv 3 \bmod 4$, par le motif $4, 4, 3, 3, 4, 4, 3, 3, \ldots$;

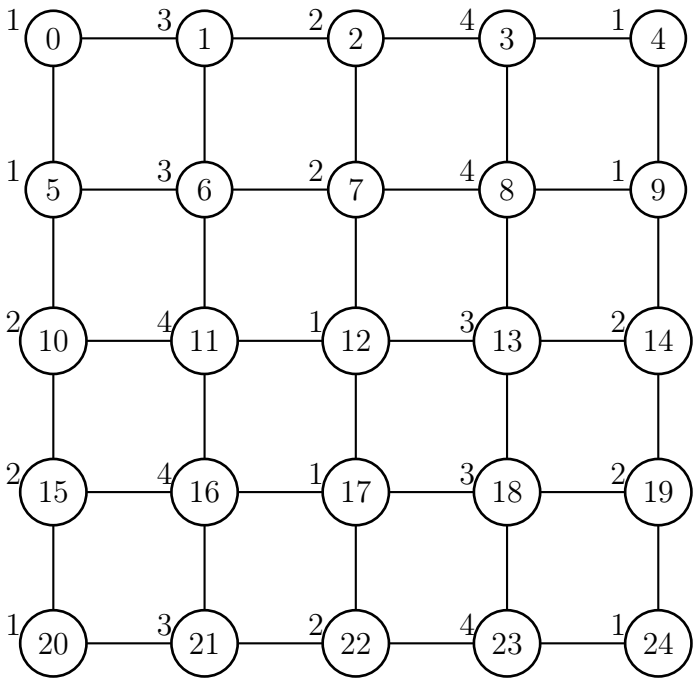

FIGURE 7 – Coloration injective de la grille 5×5, avec Δ couleurs