

Algorithmique et graphes, thèmes du second degré

Feuille TD n° 1 – Exercices (Graphes)

Exercice 1. Graphes 3-réguliers.

On s'intéresse aux graphes (sans boucles ni arêtes multiples) dont tous les sommets sont de degré trois.

- Construisez de tels graphes ayant 4 sommets, 5 sommets, 6 sommets, 7 sommets.
- Qu'en déduisez-vous ?
- Prouvez-le !

Exercice 2. Graphes 4-réguliers.

La situation est-elle identique pour les graphes dont tous les sommets sont de degré 4 ?

Exercice 3. Suites graphiques (graphes non orientés).

Une suite décroissante (au sens large) d'entiers est graphique s'il existe un graphe (sans boucles ni arêtes multiples) dont les degrés des sommets correspondent à cette suite (par exemple, le triangle à trois sommets correspond à la suite 2,2,2). Les suites suivantes sont-elles graphiques ?

- 3, 3, 2, 1, 1
- 3, 3, 1, 1
- 3, 3, 2, 2
- 4, 2, 1, 1, 1, 1
- 5, 3, 2, 1, 1, 1
- 5, 4, 3, 1, 1, 1, 1

Trouvez deux graphes distincts (c'est-à-dire non isomorphes) correspondant à la suite 3, 2, 2, 2, 1.

[Deux graphes G_1 et G_2 sont isomorphes s'il existe une bijection f entre leurs ensembles de sommets qui préserve les arêtes ($f(x)f(y)$ est une arête de G_2 si et seulement si xy est une arête de G_1). De façon plus intuitive, cela signifie que l'on peut « renommer » les sommets de G_1 de façon à obtenir G_2 ...]

Exercice 4. Suites graphiques (graphes orientés).

Pour les graphes orientés, il faut considérer des suites de couples d'entiers (le premier élément d'un couple correspond au degré entrant, le second au degré sortant). Les suites suivantes sont-elles des suites graphiques ?

- (0,1), (1,1), (1,1), (1,1), (1,0)
- (1,1), (1,1), (1,1), (1,1), (1,1)
- (0,2), (1,1), (1,1), (1,1)
- (0,2), (1,1), (1,1), (2,0)

- (1,2), (1,2), (2,1), (2,1)
- (1,2), (1,2), (2,1), (2,2), (1,1)

Exercice 5. Degrés distincts.

Essayez de construire un graphe (sans boucles ni arêtes multiples) non orienté ayant au moins deux sommets et tel que tous les sommets ont des degrés distincts. Qu'en déduisez-vous ?

Exercice 6. Les six personnes.

Montrez que dans un groupe de six personnes, il y en a nécessairement trois qui se connaissent mutuellement ou trois qui ne se connaissent pas (on suppose que si A connaît B, B connaît également A).

Montrez que cela n'est plus nécessairement vrai dans un groupe de cinq personnes.

Exercice 7. Les amis.

Montrez que dans un groupe de personnes, il y a toujours deux personnes ayant le même nombre d'amis présents.

Exercice 8. Traversée du fleuve.

Une chèvre, un chou et un loup se trouvent sur la rive d'un fleuve ; un passeur souhaite les transporter sur l'autre rive mais, sa barque étant trop petite, il ne peut transporter qu'un seul d'entre eux à la fois. Comment doit-il procéder afin de ne jamais laisser ensemble et sans surveillance le loup et la chèvre, ainsi que la chèvre et le chou ? Modéliser cette situation à l'aide d'un graphe.

Exercice 9. Jeu de Fan Tan.

Deux joueurs disposent de 2 ou plusieurs tas d'allumettes. A tour de rôle, chaque joueur peut enlever un certain nombre d'allumettes de l'un des tas (selon la règle choisie). Le joueur qui retire la dernière allumette perd la partie.

- Modéliser ce jeu à l'aide d'un graphe dans le cas où l'on dispose au départ de deux tas contenant chacun trois allumettes, et où un joueur peut enlever une ou deux allumettes à chaque fois.
- Que doit jouer le premier joueur pour gagner la partie à coup sûr ?
- Mêmes questions avec 3 tas de 3 allumettes.

Exercice 10. La bibliothèque.

Sept élèves, désignés par A,B,C,D,E,F et G se sont rendus à la bibliothèque aujourd'hui. Le tableau suivant précise « qui a rencontré qui » (la bibliothèque étant petite, deux élèves présents au même moment se rencontrent nécessairement...).

- Proposez un ordre d'arrivée possible (compatible) des élèves à la bibliothèque.
- Proposez un ordre de départ possible (compatible) des élèves de la bibliothèque.

élève	A	B	C	D	E	F	G
a rencontré	D,E	D,E,F,G	E,G	A,B,E	A,B,C,D,F,G	B,E,G	B,C,E, F