

## Flot canalisé

On désignera par  $V(G)$  et  $E(G)$  respectivement, l'ensemble des sommets et l'ensemble des arêtes d'un graphe  $G$ .

Le but de cet exercice est de traiter le problème des flots canalisés, c'est à dire où sur chaque arc, le flot doit être compris entre une valeur minimum (autre que 0) et une valeur maximum.

Les réseaux munis de capacités minimum et maximum (on parlera de réseaux à capacité bornée) n'admettent pas tous un flot réalisable. C'est le cas de l'exemple de la Figure 1 où l'on souhaite un flot maximum entre  $s$  et  $t$ . Les capacités minimum et maximum sont données entre parenthèses. Le flot sur l'arc entre  $s$  et  $A$  devra ainsi avoir une valeur comprise entre 2 et 3. Celui sur l'arc entre  $A$  et  $t$  devra avoir une valeur comprise entre 0 et 1.



FIGURE 1 – Réseau à capacité bornée sans flot réalisable

Pour trouver un flot maximum sur un réseau à capacité bornée, il faut donc d'abord trouver un flot réalisable, puis améliorer ce flot en utilisant par exemple l'algorithme de Ford et Fulkerson, rappelé en fin d'exercice. Cette version de l'algorithme tient compte de l'existence d'une capacité minimum autre que 0. Les modifications par rapport à un réseau où les capacités minimum sont toutes nulles sont :

- dans la procédure `FlotMaximum`,
  - l'ajout du paramètre `b` donnant les valeurs de capacité minimum,
  - l'ajout du paramètre `fi` donnant une valeur de flot initiale réalisable,
  - les lignes 1 et 2 réalisant cette initialisation ;
- dans la procédure `Marquage`,
  - l'ajout du paramètre `b` donnant les valeurs de capacité minimum,
  - la modification des lignes 9 et 12 prenant en compte ces valeurs minimum.

**Recherche d'un flot réalisable** Soit  $R = (G, s, t, b, c)$  un réseau à capacité bornée.  $G$  désigne le graphe sous-jacent,  $s$  et  $t$  respectivement la source et la destination du flot,  $b$  et  $c$  respectivement les valeurs minimum et maximum du flot sur chaque arc. On construit à partir de  $R$  un réseau associé  $R' = (G', s', t', c')$  munis uniquement d'une capacité maximum  $c'$ , la valeur minimum du flot sur chaque arc étant 0. Pour tout sommet  $v$ ,  $E^-(v)$  et  $E^+(v)$  désigneront respectivement l'ensemble des arcs entrant et sortant de  $v$ . Par exemple, sur le graphe de la Figure 1,  $E^-(A) = \{(s, A)\}$  et  $E^+(A) = \{(A, t)\}$ .

### Construction de $R'$

1.  $V(G') = V(G) \cup \{s', t'\}$ .
2. Ajouter dans  $G'$  tous les arcs de  $R$  avec comme nouvelle capacité  $c'(e) = c(e) - b(e)$ .
3. Pour tout sommet  $v \in V(G) \setminus \{t\}$ , ajouter dans  $G'$  un arc  $e = (v, t')$  de capacité  $c'(e) = \sum_{f \in E^+(v)} b(f)$ .
4. Pour tout sommet  $v \in V(G) \setminus \{s\}$ , ajouter dans  $G'$  un arc  $e = (s', v)$  de capacité  $c'(e) = \sum_{f \in E^-(v)} b(f)$ .
5. Ajouter deux arcs  $(s, t)$  et  $(t, s)$  dans  $G'$ , de capacité  $c'(s, t) = c'(t, s) = \infty$ .

Le réseau associé au réseau de la Figure 1 est donné par la Figure 2.

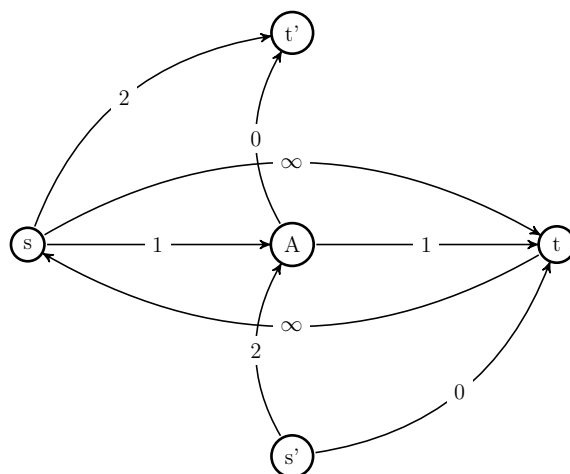


FIGURE 2 – Réseau associé au réseau de la Figure 1

**0.1)** Dessiner, le plus clairement possible, le réseau associé au réseau à capacité borné de la Figure 3.

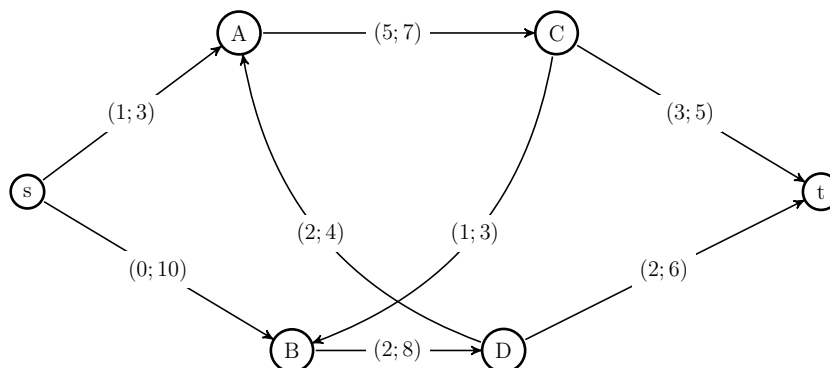


FIGURE 3 – Réseau à capacité bornée

Solution : graphe  $G'$  (Figure 4) associé au graphe de la Figure 3.

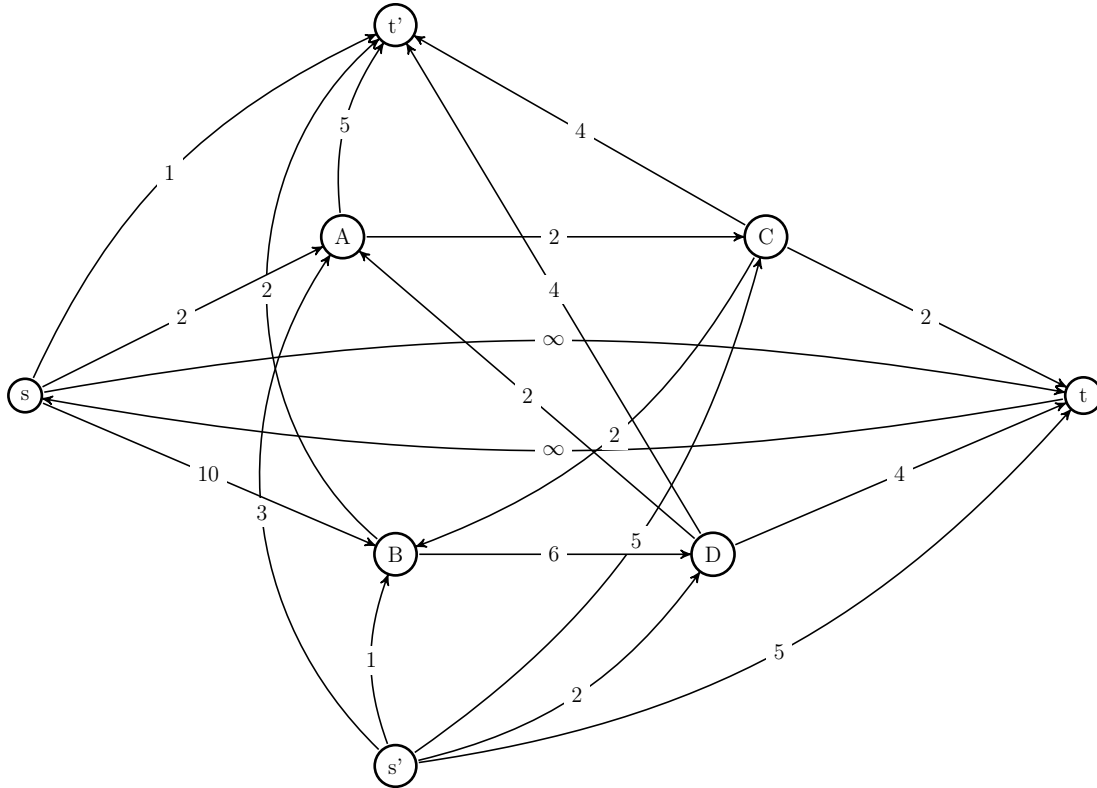


FIGURE 4 – Solution de la Question 0.1

**0.2)** En utilisant l'algorithme de Ford-Fulkerson rappelé ci-dessous, trouver le flot maximum entre les sommets  $s'$  et  $t'$  du réseau associé  $R'$  obtenu à la question 3.1. Le flot initial sera le flot nul ( $= 0$  sur tous les arcs). On vérifiera que le flot maximum trouvé sature bien tous les arcs sortants de  $s'$  et tous les arcs entrants de  $t'$ .

Chaînes augmentantes :

$$s', A, t'.delta = +3$$

$$s', B, t'.delta = +1$$

$$s', C, t'.delta = +4$$

$$s', D, t'.delta = +2$$

$$s', t, s, t'.delta = +1$$

$$s', C, t, s, B, t'.delta = +1$$

$$s', t, s, A, t'.delta = +2$$

$$s', t, s, B, D, t'.delta = +2$$

Flot maximum : voir le graphe de la Figure 5.

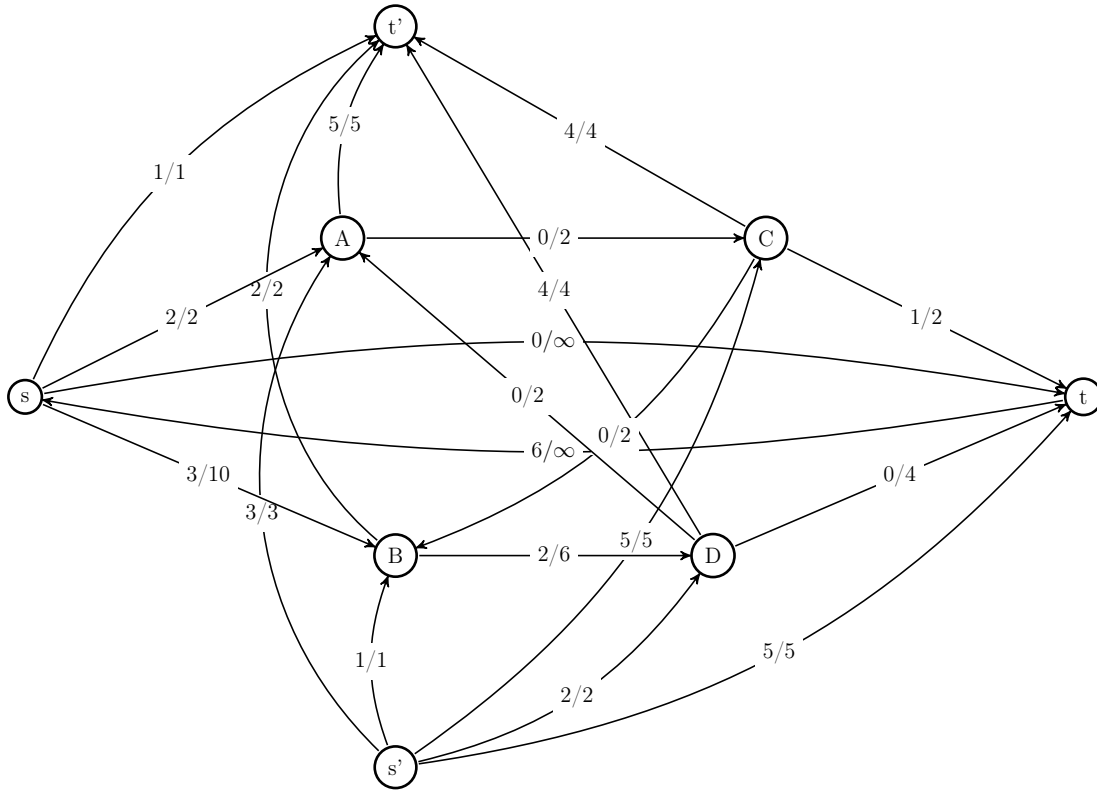


FIGURE 5 – Solution de la Question 0.2

**0.3)** Soit  $f'$  le flot maximum de  $R'$  trouvé à la question précédente (3.2). On définit un flot  $f_i$  sur  $R$  de la façon suivante : pour tout arc  $e$  de  $G$ ,  $f_i(e) = f'(e) + b(e)$ . Donnez les valeurs de  $f_i$  et vérifiez que le flot  $f_i$  est bien réalisable pour  $R$ .

Valeurs de  $f_i$ .

|             |   |   |   |   |   |   |   |   |
|-------------|---|---|---|---|---|---|---|---|
| origine     | s | s | A | B | C | C | D | D |
| destination | A | B | C | D | B | t | A | t |
| $f_i$       | 3 | 3 | 5 | 4 | 1 | 4 | 2 | 2 |

Le flot est visible sur la Figure 6. On peut vérifier que chaque valeur du flot est comprise entre la capacité minimum et la capacité maximum, et que pour chaque sommet  $\neq s, t$ , on a bien la valeur du flot entrant est égale à la valeur du flot sortant.

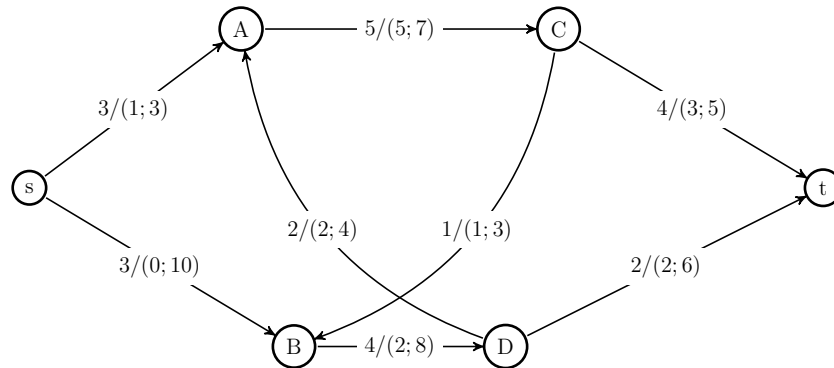


FIGURE 6 – Flot initial sur le réseau à capacité bornée

0.4) En utilisant comme flot initial le flot réalisable  $f_i$  trouvé à la question précédente, donner un flot maximum pour le réseau de la Figure 3.

Chaînes augmentantes :

$s, B, D, t, \delta = +4$

Deuxième appel de Marquage ( $t$  n'est pas atteint) :  $Y = \{s, B\}$ .

$val(Y) = c(sA) + c(BD) - b(CB) = 3 + 8 - 1 = 10$ .

$val(f) = 3 + 7 = 10$ .

Le flot maximum obtenu est représenté sur la Figure 7.

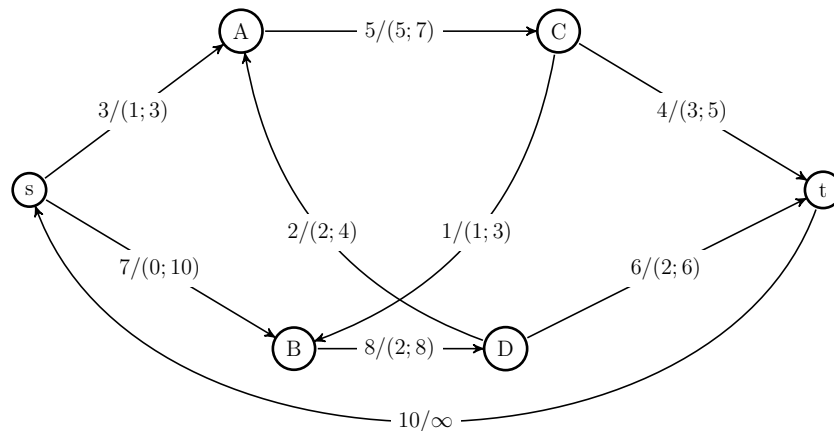


FIGURE 7 – Flot maximum sur le réseau à capacité bornée

On veut maintenant prouver qu'un réseau quelconque  $R$  à capacité bornée possède un flot

réalisable  $f$  si et seulement si le réseau associé  $R'$  (tel que défini dans l'entête) possède un flot maximum  $f'$  qui sature tous les arcs sortant de  $s'$ .

**0.5)** Montrer que si  $R$  possède un flot réalisable, alors  $f'$  sature tous les arcs sortant de  $s'$  (condition nécessaire).

On note par  $V$  et  $E$  les ensembles de sommets et d'arcs du graphe  $G$  et par  $V'$  et  $E'$  les ensembles de sommets et d'arcs du graphe  $G'$

Soit  $fr$  un flot réalisable sur  $R$ . Si on prend

$$f'(e) = fr(e) - b(e) \text{ pour tout arc } e \in E(G),$$

$$f'(e) = \sum_{f \in E^-(v)} b(f) \text{ si } e = s'v,$$

$$f'(e) = \sum_{f \in E^+(v)} b(f) \text{ si } e = vt'.$$

on a :

$$\text{pour tout arc } e \in E, b(e) \leq fr(e) \leq c(e).$$

$$\text{Donc, pour tout arc } e \in E, 0 \leq fr(e) - b(e) \leq c(e) - b(e).$$

$$\text{Donc, pour tout arc } e \in E, 0 \leq f'(e) \leq c(e) - b(e).$$

Donc sur les arcs de  $E'$  issus de  $E$ , on a bien la valeur du flot comprise entre 0 et la capacité.

Idem pour les arcs sortants de  $s'$  si on prend  $f'(s'v) = \sum_{e \in E^-(v)} b(e)$  et pour les arcs entrants de  $t'$  si on prend  $f'(vt') = \sum_{e \in E^+(v)} b(e)$ .

Pour tout sommet  $v$  de  $V' \setminus \{s, t, s', t'\}$ ,

$$\sum_{e \in E'^-(v)} f'(e) = \sum_{e \in E^-(v)} (fr(e) - b(e)) + f'(s'v)$$

$$\text{Donc } \sum_{e \in E'^-(v)} f'(e) = \sum_{e \in E^-(v)} (fr(e) - b(e)) + \sum_{e \in E^-(v)} b(e)$$

$$\text{Donc } \sum_{e \in E'^-(v)} f'(e) = \sum_{e \in E^-(v)} fr(e) - \sum_{e \in E^-(v)} b(e) + \sum_{e \in E^-(v)} b(e)$$

$$\text{Donc } \sum_{e \in E'^-(v)} f'(e) = \sum_{e \in E^-(v)} fr(e)$$

Comme  $fr$  est un flot, il respecte la loi de Kirchhoff.

$$\text{Donc } \sum_{e \in E'^-(v)} f'(e) = \sum_{e \in E^+(v)} fr(e)$$

$$\text{Donc } \sum_{e \in E'^-(v)} f'(e) = \sum_{e \in E^+(v)} fr(e) - \sum_{e \in E^+(v)} b(e) + \sum_{e \in E^+(v)} b(e)$$

$$\text{Donc } \sum_{e \in E'^-(v)} f'(e) = \sum_{e \in E^+(v)} (fr(e) - b(e)) + \sum_{e \in E^+(v)} b(e)$$

$$\text{Donc } \sum_{e \in E'^-(v)} f'(e) = \sum_{e \in E^+(v)} (fr(e) - b(e)) + f'(v, t')$$

$$\text{Donc } \sum_{e \in E'^-(v)} f'(e) = \sum_{e \in E^+(v)} f'(e) + f'(v, t')$$

$$\text{Donc } \sum_{e \in E'^-(v)} f'(e) = \sum_{e \in E'^+(v)} f'(e)$$

Donc  $f'$  respecte la loi de Kirchhoff sur tout sommet de  $V' \setminus \{s, t, s', t'\}$

$$\sum_{e \in E'^+(s)} f'(e) = \sum_{e \in E^+(s)} f'(e) + f'(st') + f'(st)$$

$$\text{Donc } \sum_{e \in E'^+(s)} f'(e) = \sum_{e \in E^+(s)} (fr(e) - b(e)) + \sum_{e \in E^+(s)} b(e) + f'(st)$$

$$\text{Donc } \sum_{e \in E'^+(s)} f'(e) = \sum_{e \in E^+(s)} fr(e) - \sum_{e \in E^+(s)} b(e) + \sum_{e \in E^+(s)} b(e) + f'(st)$$

$$\text{Donc } \sum_{e \in E'^+(s)} f'(e) = \sum_{e \in E^+(s)} fr(e) + f'(st)$$

$$\text{Donc } \sum_{e \in E'^+(s)} f'(e) = val(fr) + f'(st)$$

Donc pour que  $f'$  respecte la loi de Kirchhoff sur  $s$ , on doit avoir :

$$\sum_{e \in E'^-(s)} f'(e) = f'(ts) = val(fr) + f'(st).$$

$\sum_{e \in E'^-(t)} f'(e) = \sum_{e \in E^-(t)} f'(e) + f'(st) + f'(s't)$   
 Donc  $\sum_{e \in E'^-(t)} f'(e) = \sum_{e \in E^-(t)} (fr(e) - b(e)) + f'(st) + \sum_{e \in E^-(t)} b(e)$   
 Donc  $\sum_{e \in E'^-(t)} f'(e) = \sum_{e \in E^-(t)} fr(e) - \sum_{e \in E^-(t)} b(e) + f'(st) + \sum_{e \in E^-(t)} b(e)$   
 Donc  $\sum_{e \in E'^-(t)} f'(e) = \sum_{e \in E^-(t)} fr(e) + f'(st)$   
 Donc  $\sum_{e \in E'^-(t)} f'(e) = val(fr) + f'(st)$   
 Donc pour que  $f'$  respecte la loi de Kirchhoff sur  $t$ , on doit avoir :  
 $\sum_{e \in E'+(t)} f'(e) = f'(ts) = val(fr) + f'(st)$ .  
 Ce qui correspond à l'égalité nécessaire pour avoir le respect de la loi de Kirchhoff sur  $s$ . Donc la loi de Kirchhoff est bien respectée sur  $s$  et  $t$  et donc sur tous les sommets de  $V(G') \setminus \{s', t'\}$ .  
 Conclusion : si  $R$  admet un flot réalisable, alors  $R'$  admet un flot réalisable qui sature tous les arcs sortants de  $s'$ . Comme  $\{s'\}$  est une coupe,  $f'$  est donc le flot maximum sur  $R'$ .

Pour montrer que la condition de saturation est suffisante, on va construire à partir de  $f'$  un flot réalisable pour le réseau  $R$ . Pour cela, on définit  $f_i$  le flot sur  $R$  défini par : pour tout arc  $e$  de  $G$ ,  $f_i(e) = f'(e) + b(e)$ .

**0.6)** Montrer que pour tout arc  $e$  de  $G$ , on a bien  $b(e) \leq f_i(e) \leq c(e)$ .

Pour tout arc  $e \in E(G)$ , on a :  
 $f_i(e) = f'(e) + b(e)$   
 Or  $0 \leq f'(e) \leq c(e) - b(e)$   
 Donc  $b(e) \leq f_i(e) \leq c(e)$

**0.7)** Montrer que pour tout sommet  $v$  de  $V(G) \setminus \{s, t\}$ , on a bien  $\sum_{e \in E^-(v)} f_i(e) = \sum_{e \in E^+(v)} f_i(e)$

Soit  $v \in V(G) \setminus \{s, t\}$  :  
 $\sum_{e \in E'^-(v)} f'(e) = f'(s'v) + \sum_{e \in E^-(v)} f'(e)$   
 Donc  $\sum_{e \in E'^-(v)} f'(e) = \sum_{e \in E^-(v)} b(e) + \sum_{e \in E^-(v)} (f_i(e) - b(e))$   
 Donc  $\sum_{e \in E'^-(v)} f'(e) = \sum_{e \in E^-(v)} b(e) + \sum_{e \in E^-(v)} f_i(e) - \sum_{e \in E^-(v)} b(e)$   
 Donc  $\sum_{e \in E'^-(v)} f'(e) = \sum_{e \in E^-(v)} f_i(e)$

De même :

$\sum_{e \in E'+(v)} f'(e) = f'(vt') + \sum_{e \in E^+(v)} f'(e)$   
 Donc  $\sum_{e \in E'+(v)} f'(e) = \sum_{e \in E^+(v)} b(e) + \sum_{e \in E^+(v)} f_i(e) - b(e)$   
 Donc  $\sum_{e \in E'+(v)} f'(e) = \sum_{e \in E^+(v)} b(e) + \sum_{e \in E^+(v)} f_i(e) - \sum_{e \in E^+(v)} b(e)$   
 Donc  $\sum_{e \in E'+(v)} f'(e) = \sum_{e \in E^+(v)} f_i(e)$

Or  $f'$  est un flot, donc  $\sum_{e \in E'^-(v)} f'(e) = \sum_{e \in E'+(v)} f'(e)$   
 Donc  $\sum_{e \in E^-(v)} f_i(e) = \sum_{e \in E^+(v)} f_i(e)$

### Rappel :

Les paramètres  $b$  et  $c$  désignent les capacités minimum et maximum du graphe  $G$ ,  $s$  la source et  $t$  la destination du flot  $f$  calculé.  $f_i$  désigne la valeur initiale du flot (c'est à dire un flot réalisable).  $I(e)$  et  $T(e)$  désignent respectivement le sommet initial et le sommet terminal d'un arc  $e$ .

```
0 FlotMaximum(G,b,c,s,t,fi)
1   pour tout e de E(G) faire
2     f[e] <- fi(e)
3   repeter
4     Marquage(G,b,c,f,s,t)
5     si t appartient a Y
6       alors v <- t
7         C+ <- {(t,s)}
8         C- <- {}
9     tant que v different de s faire
10      e <- A[v]
11      si v = T(e)
12        alors C+ <- C+ U {e}
13          v <- I(e)
14        sinon C- <- C- U {e}
15          v <- T(e)
16      pour tout e de C+ faire
17        f(e) <- f(e) + delta[t]
18      pour tout e de C- faire
19        f(e) <- f(e) - delta[t]
20    tant que t appartient a Y

0 Marquage(G,b,c,f,s,t)
1   Y <- {s}
2   delta[s] <- infini
3   Max <- faux
4   tant que Y ne contient pas t et Max = faux faire
5     si il existe e = (u,v) avec Y contenant u mais pas v et f(e) < c(e)
6       alors Y <- Y U {v}
7         A[v] <- e
8         delta[v] <- min(delta[u], c(e)-f(e))
9     sinon si il existe e = (u,v) avec Y contenant v mais pas u et f(e) > b(e)
10      alors Y <- Y U {u}
11        A[u] <- e
12        delta[u] <- min(delta[u], f(e)-b(e))
13      sinon Max <- vrai
```