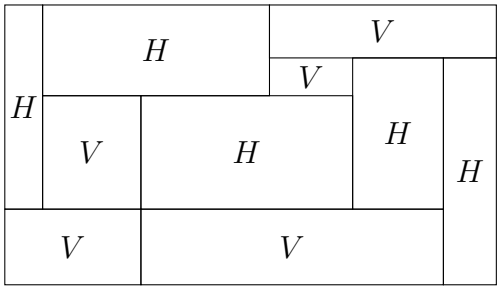
Exercice 1

On considère un rectangle pavé avec de plus petits rectangles de telle sorte que chaque petit rectangle ait au moins un de ses côtés de longueur entière. Le but de cet exercice est de montrer que le gros rectangle a aussi au moins un côté de longueur entière.

On commence par annoter chaque petit rectangle H ou V selon que ses côtés entiers soient horizontaux ou verticaux. Si tous les côtés sont entiers, on l'annote H ou V librement. On part donc d'une figure comme celle ci-dessous.



À une telle figure, on associe un graphe en remplaçant chaque rectangle par quatre sommets et deux arêtes de la façon suivante :

1. Donner le graphe correspondant au pavage ci-dessus.
2. Donner les valeurs possible des degrés d'un sommet du graphe selon qu'il se situe dans un coin, sur un côté ou à l'intérieur du grand rectangle.
3. Que peut-on dire sur l'autre extrémité d'une chaîne maximale partant du coin inférieur gauche.
4. En déduire le résultat cherché.