

Connectivité d'un graphe et flot maximal

L'*arête connectivité* d'un graphe non orienté est le nombre minimum d'arêtes qu'il faut supprimer pour que le graphe ne soit plus connexe.

Exercice 1

1. Quelle est l'arête connectivité d'un arbre ?
2. Quelle est l'arête connectivité d'une chaîne circulaire (*i.e.*, un cycle) ?

Exercice 2

On souhaite montrer comment on peut déterminer l'arête connectivité d'un graphe non orienté $G = (V, E)$ en exécutant un algorithme de calcul de flot maximal sur au plus $|V|$ réseaux de flots, comportant chacun $\mathcal{O}(V)$ sommets et $\mathcal{O}(E)$ arêtes.

Pour ce faire, pour n'importe quelle paire de sommets u et v , on définit un réseau de flot G_{uv} (version orienté de G) avec capacité $c = 1$ sur toutes les arêtes et avec pour source $s \equiv u$ et pour puit $t \equiv v$.

Le réseau de flots G_{uv} a $\mathcal{O}(V)$ sommets (en fait $|V|$ sommets) et $\mathcal{O}(E)$ arêtes. Ainsi, le nombre d'arêtes qui traverse une coupe est égal à la capacité de la coupe. Nous noterons f_{uv} le flot maximal sur le réseau de flots G_{uv} .

1. Expliquer comment créer le réseau de flots G_{uv} à partir de G . Montrer que G_{uv} a bien $|V|$ sommets et $\mathcal{O}(E)$ arcs.

On souhaite montrer la propriété suivante :

Propriété 1 *Quelque soit $u \in V$, l'arête connectivité de G noté k est égale à :*

$$k = \min_{v \in V - \{u\}} |f_{uv}|$$

où la source est fixée et où tous les puits sont possibles.

2. Si on suppose la propriété vraie, donner un algorithme qui permette de calculer l'arête connectivité d'un graphe.

La propriété 1 provient du théorème **flot maximal = coupe minimale** et de la façon dont on a choisit les capacités des arêtes pour que la coupe soit égale au nombre d'arêtes qui la traverse.

2. Démontrer la propriété 1. Pour cela vous démontrerez que $\forall u \in V$,

(a) $k \geq \min_{v \in V - \{u\}} |f_{uv}|$

(b) $k \leq \min_{v \in V - \{u\}} |f_{uv}|$