

Les exercices marqués par (*) sont à traiter en travail personnel.

Exercice 1

Montrer que dans tout graphe simple non orienté ayant au moins deux sommets, il existe toujours deux sommets de même degré.

Propriétés combinatoires des arbres

Exercice 2

1. Dessiner tous les arbres (non-isomorphes) à n sommets pour $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.
2. Quel est le degré maximum d'un arbre à n sommets? Justifier. Quelle est la structure des arbres qui, parmi tous les arbres à n sommets, ont le degré maximum le plus grand possible? Pour une valeur de n donnée, un tel arbre est-il unique?
3. Montrer que tout arbre à $n \geq 2$ sommets possède au moins deux sommets de degré 1. Quelle est la structure des arbres possédant exactement deux sommets de degré 1? Pour une valeur de $n \geq 2$ donnée, un tel arbre est-il unique?
4. Soit G un arbre de degré maximum Δ . Montrer que G possède au moins Δ sommets de degré 1. Quelle est la structure des arbres qui, parmi tous les arbres de degré maximum Δ , possède un nombre minimum possible de sommets de degré 1? Pour une valeur de Δ donnée, un tel arbre est-il unique?

Notation $O()$, notion de complexité

Exercice 3

Soit $f(n) = \frac{1}{3}n(n + \frac{1}{2})(n + 1)$. Montrer que $f(n) = \mathcal{O}(n^3)$

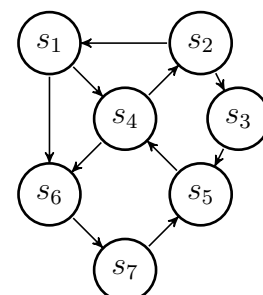
Les relations suivantes sont elles vraies?

- i. $f(n) = \mathcal{O}(n^{10})$
- ii. $f(n) = \frac{1}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$
- iii. $\mathcal{O}(n^2) = \mathcal{O}(n^3)$
- iv. $\mathcal{O}(n^3) = \mathcal{O}(n^2)$
- v. $\frac{1}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2) = \mathcal{O}(n^3)$

Représentation de graphes orientés

Exercice 4

Soit G_1 le graphe orienté dessiné à droite. Donner les listes de successeurs, la matrice d'adjacence et la matrice d'incidence de G_1 .



Exercice 5

(*) Montrer que dans un graphe orienté, la somme des degrés entrants est égale à la somme des degrés sortants.

Calcul à partir de la matrice d'adjacence, de la matrice d'incidence, des listes d'adjacences

Exercice 6

Soit G un graphe (non-orienté) représenté par la matrice d'adjacence A .

Pour chaque algorithme demandé, donner sa complexité.

Proposer un algorithme qui décide si G contient ou pas un sommet isolé (un sommet de degré 0).

Proposer un algorithme qui calcule le degré maximum de G .

(*) Proposer un algorithme qui calcule le degré minimum de G .

Exercice 7

Soit G un graphe (non-orienté) représenté par la matrice d'incidence B .

Pour chaque algorithme demandé, donner sa complexité.

Proposer un algorithme qui calcule le degré maximum de G .

Proposer un algorithme qui calcule le degré minimum de G .

(*) Proposer un algorithme qui décide si G contient ou pas un sommet isolé.

Exercice 8

Soit G un graphe (non-orienté) représenté par les listes d'adjacence $Adj[\cdot]$.

Pour chaque algorithme demandé, donner sa complexité.

Proposer un algorithme qui calcule le degré minimum de G .

Proposer un algorithme qui décide si G contient ou pas un sommet isolé.

(*) Proposer un algorithme qui calcule le degré maximum de G .

Exercice 9

(*) On se donne un graphe orienté à n sommets et m arcs. On suppose que le degré (nombre d'arcs entrant ou sortant) de chaque sommet est au plus d .

Donner l'algorithme et une majoration (la plus basse possible en fonction de n , m , d) pour la complexité de chacune des opérations suivantes :

1. faire afficher tous les successeurs d'un sommet s donné
2. faire afficher tous les prédécesseurs d'un sommet s donné
3. déterminer si un graphe est sans boucle (une boucle est un arc $s \rightarrow s$)

suivant qu'on utilise, pour représenter le graphe, une matrice d'adjacence $A[i, j]$, une matrice d'incidence $B[u, e]$, ou des listes de successeurs $Adj[u]$.