Algorithmique des graphes

Olivier Baudon

Université de Bordeaux

12 septembre 2020

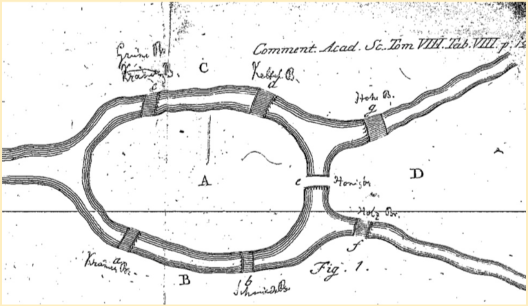
Rappels historiques

Ponts de Könisberg - Léonard Euler

- *Est-il possible de passer par tous les ponts de la ville de Könisberg une et une seule fois et revenir à son point de départ ?*
- présenté le 26 août 1735 à l'Académie impériale des sciences de Saint Pétersbourg.
- Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis, Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae 8, pp. 128-140, Berlin, 1736.

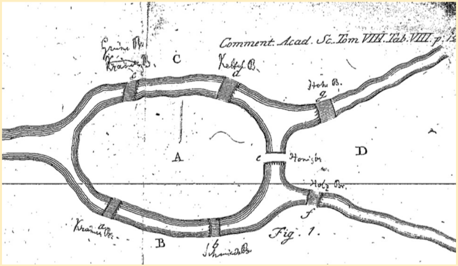
Rappels historiques

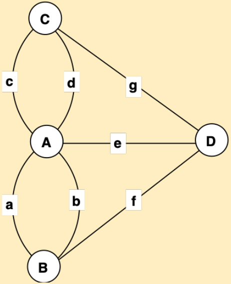
Könisberg



Rappels historiques

Könisberg



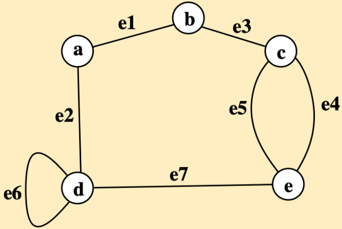


Définitions sur les graphes non orientés

Graphe

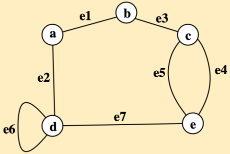
Un graphe G est un couple (V, E) où

- V est un ensemble *non vide* dont les éléments sont appelés sommets,
- E est un ensemble d'éléments appelés arêtes, chaque arête étant composée de deux sommets de V (pas forcément distincts).
- Exemple $G = (V, E)$ avec $V = \{a, b, c, d, e\}$ et $E = \{e1 = ab, e2 = ad, e3 = bc, e4 = ce, e5 = ce, e6 = dd, e7 = de\}$



Définitions sur les graphes non orientés

Boucle et arête multiple

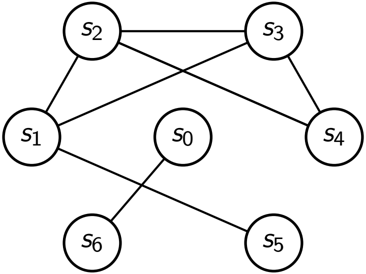
- Une arête reliant un sommet à lui-même est appelée une boucle.
- Un ensemble de plusieurs arêtes reliant deux mêmes sommets est appelé une multi-arête.
- 

  e6 est une boucle et {e4, e5} est une multi-arête.

Définitions sur les graphes non orientés

Graphe simple

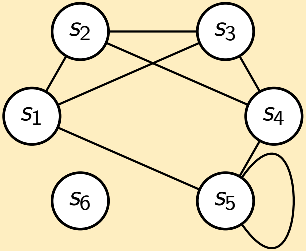
Un graphe simple est un graphe sans boucle, ni arête multiple.
Sauf mention contraire, les graphes considérés dans la suite de ce cours seront simples.



Définitions sur les graphes non orientés

Degré

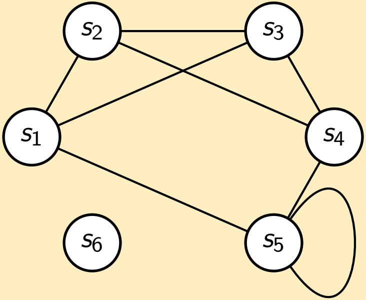
Le degré d'un sommet v dans un graphe G, noté $deg_G(v)$, est le nombre de fois où ce sommet est contenu dans un arête (une boucle compte pour 2).
S'il n'y a pas d'ambiguïté sur le graphe considéré, on utilisera la notation simplifiée $deg(v)$.
Dans l'exemple ci-dessous, le sommet S_2 est de degré 3, le sommet S_5 de degré 4 et le sommet S_6 de degré 0.



Définitions sur les graphes non orientés

Relation d'adjacence - Voisinage

Deux sommets reliés par une arête seront dits voisins ou adjacents. L'ensemble des voisins d'un sommet v sera appelé le voisinage de v et noté $\Gamma(v)$.
Dans l'exemple ci-dessous,
$\Gamma(S_2) = \{S_1, S_3, S_4\}, \Gamma(S_5) = \{S_1, S_4, S_5\}, \Gamma(S_6) = \emptyset$.



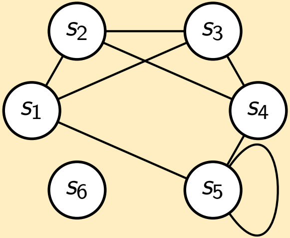
Définitions sur les graphes non orientés

Relation d'incidence

Une arête $e = uv$ sera dite incidente aux sommets u et v. De même, u et v seront dits incidents à e.
Deux arêtes $e1 = uv$ et $e2 = uw$ partageant un sommet (ici le sommet u), seront dites voisines.

Ordre - Taille - Notation

Soit G un graphe. L'ordre de G, noté $n(G)$ est son nombre de sommets, la taille de G, noté $m(G)$ son nombre d'arêtes.
L'ensemble de ses sommets sera désigné par $V(G)$, l'ensemble de ses arêtes par $E(G)$, son degré maximum par $\Delta(G)$, son degré minimum par $\delta(G)$.
S'il n'y a pas d'ambiguïté sur le graphe considéré, on utilisera une notation simplifiée : n, m, V, E, Δ et δ.
Dans l'exemple ci-dessous, $n = 6, m = 8, \Delta = 4, \delta = 0$.



Définitions sur les graphes orientés

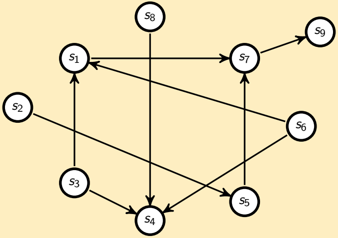
Graphe orienté

Si l'on oriente les arêtes d'un graphe, on ne parlera plus d'arêtes, mais d'arcs.

L'arc uv qui relie le sommet u au sommet v est appelé un arc sortant de u et entrant de v.

u sera appelé un prédécesseur de v et v un successeur de u.

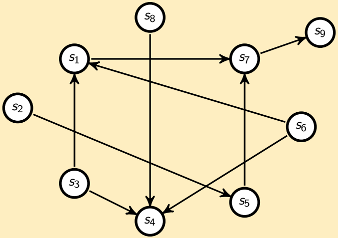
Dans l'exemple ci-dessous, S_8 est un prédécesseur de S_4 et S_7 un successeur de S_1. S_8S_4 est un arc sortant de S_8 et entrant de S_4.



Définitions sur les graphes orientés

degré entrant et sortant

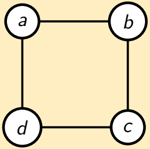
Le nombre d'arcs sortant d'un sommet v est appelé le degré sortant de v, noté $d^+(v)$.
Le nombre d'arcs entrant d'un sommet v est appelé le degré entrant de v, noté $d^-(v)$.
De même, l'ensemble des prédécesseurs de v sera noté $\Gamma^-(v)$ et celui de ses successeurs $\Gamma^+(v)$.
Dans l'exemple ci-dessous,
$deg^-(S_8) = 0, deg^+(S_8) = 1, \Gamma^-(S_1) = \{S_3, S_6\}, \Gamma^+(S_1) = \{S_7\}$.



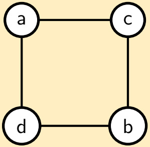
Étiquetage

Étiquette

Le nom d'un sommet est appelé son étiquette, l'ensemble des étiquettes des sommets d'un graphe G l'étiquetage de G.
Les deux graphes ci-dessous sont différents car l'arête ab est une arête de G_1, mais pas une arête de G_2.



Graphe G_1

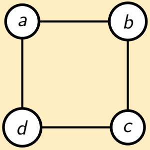


Graphe G_2

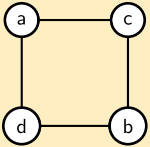
Étiquetage

Isomomorphisme

Deux graphes G_1 et G_2 seront dits isomorphes s'ils sont égaux à un renommage des sommets près, c'est à dire s'il existe une bijection φ de $V(G_1)$ vers $V(G_2)$ telle que pour toute paire de sommets u, v de $V(G_1)$, $uv \in E(G_1) \Leftrightarrow \varphi(u)\varphi(v) \in E(G_2)$.
Les deux graphes ci-dessous sont isomorphes avec $\varphi(a) = a, \varphi(b) = c, \varphi(c) = b, \varphi(d) = d$.



Graphe G_1



Graphe G_2

Cheminement

Chaîne

Une chaine d'un graphe G est une suite alternée de sommets et d'arêtes de G : $v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, \dots v_k, e_k, v_{k+1}$ telle que pour tout $1 \leq i \leq k$, $e_i = v_i v_{i+1}$.
La longueur d'une chaîne est son nombre d'arêtes.
Une chaîne est dite simple si elle ne contient pas deux fois la même arête.
Une chaîne est dite élémentaire si elle ne contient pas deux fois le même sommet. *Tout chaîne élémentaire est simple*.

Cheminement

Cycle

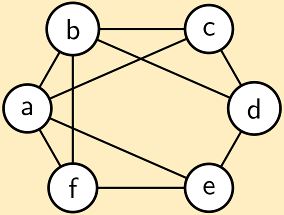
Un cycle est est une chaîne dont les extrémités se confondent, i.e. une suite alternée de sommets et d'arête de G :
$v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, \dots v_k, e_k, v_{k+1}$ telle que pour tout $1 \leq i \leq k$, $e_i = v_i v_{i+1}$ et $v_{k+1} = v_1$.
La longueur d'un cycle est son nombre d'arêtes et donc également de sommets.
Un cycle est dit élémentaire si il ne contient pas deux fois le même sommet à l'exception de ses extrémités.
Sauf précision contraire, on ne parlera que de chaîne ou de cycle élémentaire.
Une boucle est un cycle.
Dans un graphe simple, on ne précisera pas les arêtes de la chaîne ou du cycle.

Cheminement

Exemples

Dans le graphe ci-dessous,

- *aba* est une chaîne non simple.
- *abcae* est une chaîne simple non élémentaire.
- *abcde* est une chaîne élémentaire.
- *aba* est un cycle non simple.
- *abcafea* est un cycle simple non élémentaire.
- *abdca* est un cycle élémentaire.



Cheminement dans les graphes orientés

Chemin

Une chemin d'un graphe G orienté est une suite alternée de sommets et d'arcs de G : $v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, \ldots v_k, e_k, v_{k+1}$ telle que pour tout $1 \leq i \leq k$, $e_i = v_i v_{i+1}$.
La longueur d'un chemin est son nombre d'arcs.
Une chemin est dite simple si il ne contient pas deux fois le même arc.
Une chemin est dite élémentaire si il ne contient pas deux fois le même sommet. *Tout chemin élémentaire est simple*.

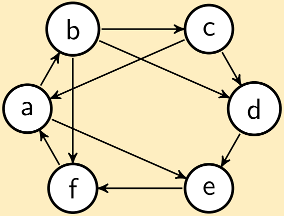
Circuit

Un circuit est est un chemin dont les extrémités se confondent, i.e. une suite alternée de sommets et d'arc de G :
$v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, \dots v_k, e_k, v_{k+1}$ telle que pour tout $1 \leq i \leq k$, $e_i = v_i v_{i+1}$ et $v_{k+1} = v_1$.
La longueur d'un circuit est son nombre d'arcs et donc également de sommets.
Un circuit est dit élémentaire si il ne contient pas deux fois le même sommet à l'exception de ses extrémités.
Sauf précision contraire, on ne parlera que de chemin ou de circuit élémentaire.
Dans un graphe simple, on ne précisera pas les arcs du chemin ou du circuit.
Un boucle dans un graphe orienté est un circuit.
Si on parle de chaîne ou de cycle dans un graphe orienté, cela signifie que l'on néglige l'orientation des arcs.

Cheminement dans les graphes orientés

Exemples

- *abfaefa* est un circuit non simple.
- *abcaefa* est un circuit simple non élémentaire.
- *abfa* est un circuit élémentaire.

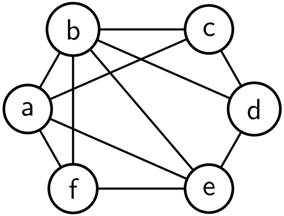


Sous-graphes

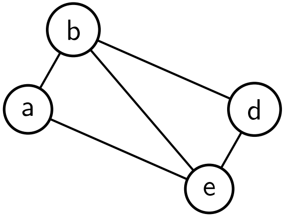
Sous-graphe induit

Soit G un graphe et $S \subseteq V(G)$. Le sous-graphe de G induit par S, noté G_S est le graphe (S, E') avec

$$E' = \{e | e \in E \text{ et } e = uv \text{ avec } u \in S, v \in S\}$$



Graphe G

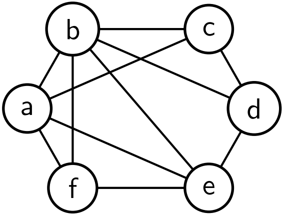


Graphe $G_{\{a,b,d,e\}}$

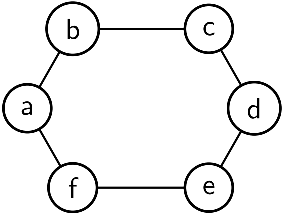
Sous-graphes

Graphe partiel

Soit G un graphe. Un graphe partiel de G est un graphe $G' = (V(G), E')$ avec $E' \subseteq E$.



Graphe G

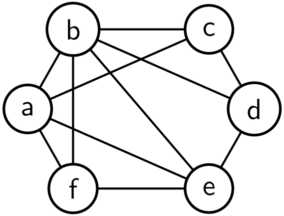


Graphe partiel de G

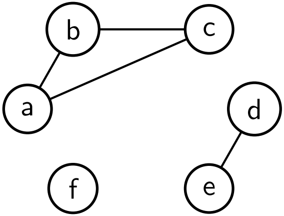
Connexité

Graphe connexe

Un graphe G est dit connexe si et seulement si il existe une chaîne entre toute paire de sommets.
Remarque : pour montrer qu'un graphe G est connexe, il suffit de montrer qu'il existe un sommet v relié à tous les autres par au moins une chaîne.



Graphe connexe



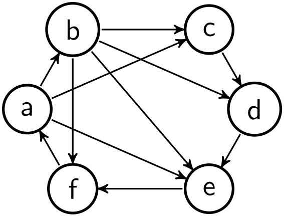
Graphe non connexe

Connexité

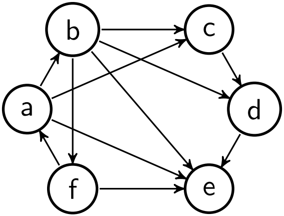
Graphe fortement connexe

Un graphe orienté G est dit fortement connexe si et seulement si il existe une chemin entre toute paire de sommets.

Remarque : pour montrer qu'un graphe orienté G est fortement connexe, il suffit de montrer qu'il existe un sommet s tel que pour tout sommet $v \in V(G), v \neq s$, il existe un chemin de s à v et un chemin de v à s.



Graphe fortement connexe



Graphe non fortement connexe

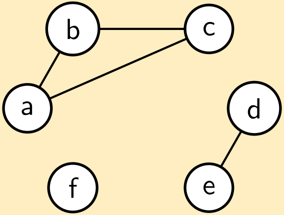
Connexité

Composante connexe

Une composante connexe d'un graphe est un sous-graphe induit maximal en nombre de sommets qui soit connexe.

Exemple

Le graphe ci-dessous possède 3 composantes connexes, $G_{\{a,b,c\}}$, $G_{\{d,e\}}$,$G_{\{f\}}$,



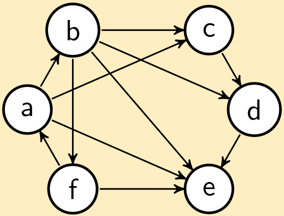
Connexité

Composante fortement connexe

Une composante fortement connexe d'un graphe orienté est un sous-graphe induit maximal en nombre de sommets qui soit fortement connexe.

Exemple

Le graphe ci-dessous possède 4 composantes fortement connexes $G_{\{a,b,f\}}$, $G_{\{c\}}$, $G_{\{d\}}$ $G_{\{e\}}$.



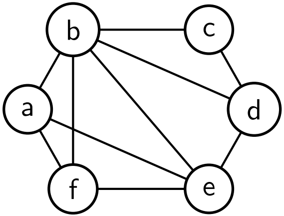
Connexité

Graphe k-connexe

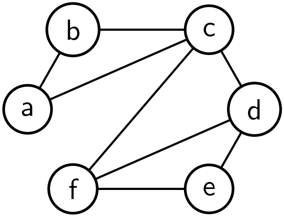
Soit k un entier ≥ 1. Un graphe G est dit k-connexe si toute suppression d'au plus $k-1$ sommet ne déconnecte pas le graphe.
Dire qu'un graphe est connexe ou 1-connexe est équivalent.

Connectivité

La connectivité d'un graphe G est le plus grand entier k tel que G est k-connexe.



Graphe de connectivité 2

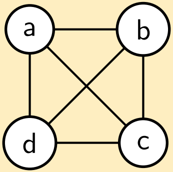


Graphe de connectivité 1

Graphes "classiques"

Graphe complet

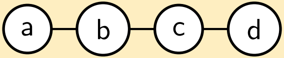
Un graphe complet à n sommets, noté K_n, est un graphe simple dans lequel tous les sommets sont reliés par une arête.
A noter que par convention, un graphe complet K_n est de connectivité $n - 1$.
Le graphe ci-dessous est le graphe K_4, graphe complet à 4 sommets.



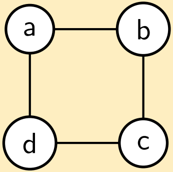
Graphes "classiques"

Chaîne et Cycle

Un graphe simple constitué d'une chaîne à n sommets : $v_1, \ldots, v_n$, est appelé une chaîne et noté P_n.
Un graphe simple constitué d'un cycle à n sommets $v_1, \ldots, v_n, v_1$ est appelé un cycle et noté C_n.



Graphe P_4



Graphe C_4

Représentation des graphes

Matrice d'adjacence - graphe non orienté

Soit G un graphe non orienté à n sommets. A, la matrice d'adjacence de G est une matrice de taille $n \times n$ ou $A_{i,j}$ est le nombre d'arêtes entre les sommets i et j.

Matrice d'adjacence - graphe orienté

Soit G un graphe orienté à n sommets. A, la matrice d'adjacence de G est une matrice de taille $n \times n$ ou $A_{i,j}$ est le nombre d'arcs du sommet i vers le sommet j.

Représentation des graphes

Matrice d'incidence - graphe non orienté

Soit G un graphe non orienté à n sommets et m arêtes. B, la matrice d'incidence de G est une matrice de taille $n \times m$ ou $B_{i,j}$ est égal au nombre d'incidences entre le sommet i et l'arête j (1 si l'arête j est une arête entre i et un autre sommet, 2 si j est une boucle sur i.

Matrice d'incidence - graphe orienté

Soit G un graphe non orienté à n sommets et m arêtes. B, la matrice d'incidence de G est une matrice de taille $n \times m$ ou $B_{i,j}$ est égal à

- -1 si si le sommet i est l'origine de l'arc j,
- 1 si si le sommet i est la destination de l'arc j,
- 0 si i n'est pas incident à j ou si j est une boucle.

Représentation des graphes

Liste d'adjacence

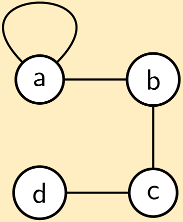
Un graphe G peut être représenté par des listes d'adjacence, une par sommet. Si G est non orienté, la liste d'adjacence d'un sommet v $Adj(v)$ contiendra l'ensemble des voisins de v. Si G est orienté $Adj(v)$ contiendra la liste des successeurs de v.

Représentation en machine

Pour améliorer l'efficacité des programmes, il est plutôt conseillé d'utiliser des tables de hachage pour représenter les ensembles de voisins, successeurs, prédécesseurs, arcs sortants ou arcs entrants, afin d'avoir un bon compromis entre "tester si deux sommets sont voisins", "parcourir la liste des voisins" et la mémoire utilisée.

Représentation des graphes

Matrice d'adjacence - graphe non orienté



Graphe G

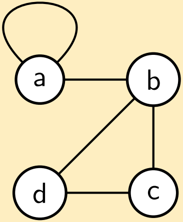
$$\begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrice d'adjacence de G

Représentation des graphes

Matrice d'incidence - graphe non orienté

Les arêtes sont dans l'ordre lexicographique : aa ab, bc, bd, cd.



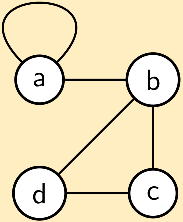
Graphe G

$$\begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice d'incidence de G

Représentation des graphes

Listes d'adjacence - graphe non orienté



a : a, b

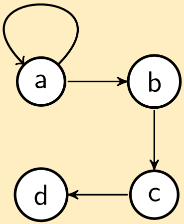
b : a, c, d

c : b, d

d : b, c

Représentation des graphes

Matrice d'adjacence - graphe orienté



Graphe G

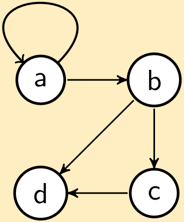
$$\begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrice d'adjacence de G

Représentation des graphes

Matrice d'incidence - graphe orienté

Les arêtes sont dans l'ordre lexicographique : aa ab, bc, bd, cd.



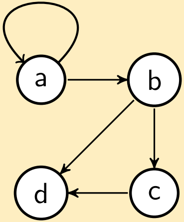
Graphe G

$$\begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice d'incidence de G

Représentation des graphes

Listes d'adjacence - graphe orienté



a : a, b

b : c, d

c : d

d :

Résultats "de base"

Théorèmes

- Le nombre maximum d'arêtes dans un graphe simple est égal à $\frac{n \times (n-1)}{2}$.
  Preuve : Le nombre d'arêtes est égal à $\sum_{k=1}^{n-1} k$. En effet, si on compte les arêtes sommet par sommet, chaque sommet v possède au plus $n-1$ arêtes incidentes, dont $i-1$ ont déjà été comptées si v est le $i$ème sommet considéré.

Résultats "de base"

Théorèmes

- La somme des degrés d'un graphe non orienté est paire et égale à deux fois le nombre d'arêtes.
  Preuve : C'est vrai pour un graphe ayant 0 arête.
  Supposons que cela soit vrai pour tout graphe ayant au plus m arêtes avec $m \geq 0$. Soit G un graphe ayant $m+1$ arêtes. Soit G' le graphe obtenu en enlevant une arête e à G. G' possède m arêtes et on peut donc lui appliquer l'hypothèse de récurrence :

$$\sum_{v \in V(G')} deg_{G'}(v) = 2 \times m$$

  Si on rajoute l'arête e à G', on augmente la somme des degrés de 2. Donc :

$$\sum_{v \in V(G)} deg_G(v) = 2 \times m + 2 = 2 \times (m+1)$$

  Par récurrence, le théorème est donc vrai pour tout $m \geq 0$.
  Si on applique ce résultat à un graphe simple à n sommets ayant un maximum d'arêtes, comme chaque sommet est de degré $n-1$, la somme des degrés est $n \times (n-1)$ et donc le nombre d'arêtes $\frac{n \times (n-1)}{2}$.

Résultats "de base"

Théorèmes

- Le nombre de sommets de degré impair dans un graphe non orienté est pair.
  Preuve : Par l'absurde : sinon la somme des degrés serait impaire, donc on a une contradiction avec le théorème précédent.
- Dans un graphe orienté, la somme des degrés entrants est égale à la somme des degrés sortants et au nombre d'arcs.

Résultats "de base"

Théorèmes

- Dans tout graphe simple ayant au moins deux sommets, il existe au moins deux sommets de même degré.
  Preuve : Soit G un graphe simple ayant au moins deux sommets.
  - Si tous les sommets sont de degré 0 $\rightarrow$ Ok.
  - Sinon, il existe dans G une composante connexe C contenant au moins deux sommets. Soit k l'ordre de cette composante connexe. Les degrés des sommets de C peuvent aller de 1 à $k-1$. Il y a donc $k-1$ valeurs possibles pour les degrés de k sommets. Donc au moins deux d'entre eux ont le même degré.