

Sur les ensembles représentés par les partitions
d'un entier n

Jean-Christophe Aval sous la direction de Laurent Habsieger

15 juin 1998

Table des matières

1	Introduction	2
2	Premiers pas	4
2.1	Objectifs	4
2.2	Démonstration du Théorème 2	6
2.3	Démonstration du Théorème 3	8
3	Calcul des équivalents de $p(n)$ et de $q(n, k)$	9
3.1	Énoncé	9
3.2	Un théorème taubérien	10
3.3	Application aux partitions	15
4	Étude des partitions ne représentant pas un entier donné	18
4.1	Les résultats	18
4.2	Lemmes sur les partitions	20
4.3	Lemmes additifs	25
4.4	Fin de la preuve des Théorèmes 7 et 8	31
5	Amélioration des constantes	34
5.1	Énoncés des résultats	34
5.2	Deux lemmes	35
5.3	Application à la majoration de $Q(n, a)$ et $Q(n, a, 2)$	38
5.4	Fin de la preuve	43
	Appendice	44
	Bibliographie	47

Chapitre 1

Introduction

Soit

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_j, \quad 1 \leq n_1 \leq n_2 \leq \cdots \leq n_j,$$

une partition Π de l'entier n (par définition, les n_i sont entiers). On dit que cette partition représente l'entier a s'il existe $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_j \in \{0, 1\}$, tels que $a = \sum_{i=1}^j \epsilon_i n_i$. L'ensemble $\mathcal{E}(\Pi)$ représenté par la partition Π est l'ensemble des a représentés par Π . Cet ensemble est évidemment contenu dans $[0, n]$ et symétrique (s'il contient a , il contient alors aussi $n - a$). Deux partitions Π et Π' seront dites équivalentes si elles représentent les mêmes entiers. Si k est un entier non nul, on dira qu'une partition est k -réduite si chaque sommant apparaît au plus k fois ; ainsi les partitions 1-réduites sont les partitions à parts distinctes. On notera \mathbb{N}^* l'ensemble des entiers naturels non nuls et :

- $p(n)$ le nombre de partitions de l'entier n à parts dans \mathbb{N}^* ,
- $q(n, k)$ le nombre de partitions k -réduites (si $k = 1$, on notera simplement $q(n)$).

Les séries génératrices sont donc :

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n = \prod_{m \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{1 - x^m},$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} q(n, k)x^n = \prod_{m \in \mathbb{N}^*} \frac{1 - x^{(k+1)m}}{1 - x^m}.$$

Nous désignerons par $\hat{p}(n)$ le nombre d'ensembles distincts représentés par les $p(n)$ partitions de n . On définit de même $\hat{q}(n, k)$ et on note $\hat{q}(n)$ pour $\hat{q}(n, 1)$.

Le but de cet exposé est l'étude du comportement asymptotique de $\hat{p}(n)$ et $\hat{q}(n)$, notamment de les comparer à $p(n)$ et $q(n)$.

Notons que l'on peut aussi définir les grandeurs précédentes en imposant que les parts des partitions soient dans une partie fixée de \mathbb{N}^* , par exemple l'ensemble des puissances de 2. Une étude très complète de ce problème a été faite par M. Deléglise, P. Erdős et J. L. Nicolas dans [1].

Nous allons commencer par montrer une première série de résultats, relativement faciles à obtenir, pour lesquels on utilise les équivalents classiques de $p(n)$ et $q(n, k)$, dont une preuve se trouve au chapitre suivant. Puis, nous étudierons le nombre de partitions ne représentant pas un entier a fixé, ce qui nous permettra dans une dernière partie d'améliorer les résultats concernant $\hat{p}(n)$ et $\hat{q}(n)$.

Ces questions d'étude du comportement asymptotique de problèmes liés aux partitions remontent au début du siècle avec les résultats de G. H. Hardy et S. Ramanujan (cf [7]), avant d'être approfondies par la suite (par exemple par E. M. Wright pour les sommants à valeurs carrées, dans [14]).

Mais l'étude des ensembles représentés par les partitions est plus récente. Sous l'impulsion de P. Erdős, elle a été menée par J. L. Nicolas, M. Deléglise, A. Sárközy, J. Dixmier ou M. Szalay par exemple.

Chapitre 2

Premiers pas

2.1 Objectifs

L'objet de ce chapitre est l'obtention de premières informations concernant le comportement asymptotique de $\hat{p}(n)$ et $\hat{q}(n)$. Certains de ces résultats seront améliorés ultérieurement, mais la simplicité de leur obtention et leur antériorité font qu'ils trouvent leur place ici afin de comprendre l'évolution des méthodes employées pour résoudre le problème. On va donc dans cette partie démontrer les résultats suivants :

Théorème 1 :

$$(1) \quad p(n)^{0.361} \leq \hat{p}(n)$$

pour n assez grand.

Théorème 2 :

$$(2) \quad q(n)^{0.51} \leq \hat{q}(n)$$

pour n assez grand.

Théorème 3 :

$$(3) \quad \hat{p}(n) \leq p(n)^{0.816}$$

pour n assez grand.

Remarques :

1. Il est important à ce stade de mentionner les équivalents fondamentaux :

$$(4) \quad p(n) \sim \frac{\exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right)}{4\sqrt{3}n}$$

et

$$(5) \quad q(n, k) \sim \frac{k^{1/4}}{2(k+1)^{3/4}6^{1/4}} \frac{1}{n^{3/4}} \exp\left(2\pi\sqrt{\frac{kn}{6(k+1)}}\right).$$

En particulier, pour $k = 1$,

$$(6) \quad q(n) \sim \frac{1}{4(3n^3)^{1/4}} \exp\left(\pi\sqrt{\frac{n}{3}}\right).$$

Ces équivalents seront démontrés au chapitre suivant.

2. On peut obtenir facilement une inégalité

$$(7) \quad p(n)^{c_1} \leq \hat{p}(n)$$

avec une constante moins bonne que celle du Théorème 1 :

Soit $E = \{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ un ensemble d'entiers distincts entre $\sqrt{n}/2$ et \sqrt{n} , et posons

$$e_{k+1} = n - (e_1 + e_2 + \dots + e_k) > \sqrt{n}.$$

Les entiers a représentés par la partition $n = e_1 + e_2 + \dots + e_{k+1}$ et compris entre $\sqrt{n}/2$ et \sqrt{n} sont exactement les éléments de E et ainsi $\hat{p}(n) \gg 2^{\sqrt{n}/2}$. En utilisant l'équivalent de $p(n)$ rappelé ci-dessus, on en tire que tout $c_1 < \frac{\log 2}{2\pi\sqrt{2/3}} = 0.135\dots$ convient dans (7).

3. On peut affiner un peu le raisonnement précédent en introduisant un paramètre : si E est inclus dans $[z\sqrt{n}, 2z\sqrt{n}]$, on peut mener la même démarche que ci-dessus pourvu que $z < \sqrt{2/3}$; comme $\sqrt{2/3} > 1/2$, on obtient une constante un peu meilleure : 0.22... .

4. Le Théorème 1 est une conséquence du Théorème 2 compte tenu des équivalents de $p(n)$ et $q(n)$, vu que $\hat{q}(n) \leq \hat{p}(n)$.

2.2 Démonstration du Théorème 2

Pendant la preuve, z est un nombre réel fixé qu'on devra choisir de façon optimale, k est un grand entier, et pour k fixé, n sera un entier, $n \rightarrow \infty$. Soient $y_1, y_2, \dots, y_{[kz]}$ des réels positifs vérifiant l'équation

$$(8) \quad \sum_{j=1}^{[kz]} y_j \left(z + \frac{j}{k} \right) = k - 1.$$

Pour $j = 1, 2, \dots, [kz]$, posons

$$I_j = \left\{ [z\sqrt{n}] + (j-1) \left\lfloor \frac{\sqrt{n}}{k} \right\rfloor + 1, [z\sqrt{n}] + (j-1) \left\lfloor \frac{\sqrt{n}}{k} \right\rfloor + 2, \dots, [z\sqrt{n}] + j \left\lfloor \frac{\sqrt{n}}{k} \right\rfloor \right\}.$$

Soit Γ la famille des ensembles S de la forme

$$S = \cup_{j=1}^{[kz]} S_j,$$

où $S_j \subset I_j$ et $|S_j| = \lfloor y_j \frac{\sqrt{n}}{k} \rfloor$ pour $j = 1, 2, \dots, [kz]$. On tire de (8) que

$$s_0 \stackrel{\text{def}}{=} n - \sum_{s \in S} s \geq \frac{n}{k}$$

de telle sorte que pour n assez grand, on a $s_0 > 2z\sqrt{n}$ (s_0 est par conséquent strictement plus grand que les éléments de S). Donc les éléments de $S \cup \{s_0\}$ déterminent une partition $\Pi(S)$ à parts distinctes $> z\sqrt{n}$ et visiblement pour cette partition, on a

$$\mathcal{E}(\Pi(S)) \cap [0, 2z\sqrt{n}] = S.$$

Donc pour S et S' distincts dans Γ , $\mathcal{E}(\Pi(S))$ est différent de $\mathcal{E}(\Pi(S'))$. Il s'ensuit que

$$\hat{q}(n) \geq |\Gamma|.$$

En appliquant la formule de Stirling, on a

$$\begin{aligned} |\Gamma| &= \prod_{j=1}^{[kz]} \binom{\lfloor \frac{\sqrt{n}}{k} \rfloor}{\lfloor y_j \frac{\sqrt{n}}{k} \rfloor} \\ &= \exp \left((1 + o(1)) \left(- \sum_{j=1}^{[kz]} (y_j \log y_j + (1 - y_j) \log(1 - y_j)) \right) \frac{\sqrt{n}}{k} \right). \end{aligned}$$

Puis on maximise l'expression obtenue par la méthode des multiplicateurs de Lagrange (qui nous donne que $\log \frac{1-y_j}{y_j} (z+j/k)^{-1}$ ne dépend pas de j), et en utilisant que k est grand, on aboutit à :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \hat{q}(n)}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{\mu} \int_{z\mu}^{2z\mu} \left(\log(1+e^u) - \frac{ue^u}{1+e^u} \right) du \stackrel{\text{def}}{=} Q(z, \mu)$$

où $\mu = \mu(z)$ vérifie

$$\int_z^{2z} \frac{x}{1+e^{\mu x}} dx = 1.$$

Remarquons que μ est défini dès que $z > \sqrt{2/3}$. Il s'agit alors d'optimiser le choix des paramètres.

Ce sont des essais infructueux visant l'amélioration des résultats obtenus dans l'article [1] qui nous ont fait penser que l'on pouvait résoudre de manière exacte ce problème. En effet, un calcul¹ permet de se ramener au seul paramètre $\lambda = e^{-\mu z}$, avec

$$Q(z, \mu) = F(\lambda) = (2I(\lambda) - L(\lambda)) \left(\frac{-\log \lambda}{I(\lambda) - L(\lambda)} \right)^{1/2}$$

où

$$I(\lambda) = \int_1^2 \log(1+\lambda^y) dy$$

$$L(\lambda) = \log \left(\frac{(1+\lambda^2)^2}{1+\lambda} \right).$$

Un simple calcul² permet alors de montrer qu'il y a un unique maximum sur $]0, +\infty[$, à savoir en λ_0 , racine de $X^3 + 2X - 1$ (i. e. pour $L(\lambda)$ nul), et en ce point $F(\lambda_0) = 2\sqrt{-\log \lambda_0 \int_1^2 \log(1+\lambda_0^y) dy}$.

Numériquement, on a :

$$\lambda_0 = 0.453397652\dots, \quad F(\lambda_0) = 0.9261401058\dots,$$

$$\frac{F(\lambda_0)}{\pi\sqrt{2/3}} = 0.361054239\dots, \quad \frac{F(\lambda_0)}{\pi/\sqrt{3}} = 0.51060780\dots$$

d'où le Théorème 2 et le Théorème 1.

1. Voir appendice.

2. Voir appendice.

2.3 Démonstration du Théorème 3

La démonstration est simple et astucieuse et utilise des notions très utiles dans le cas des partitions à sommants binaires (i. e. des puissances de 2) :

On dit qu'une partie \mathcal{A} de \mathbb{N} est k -stable avec k entier ≥ 2 si $a \in \mathcal{A} \implies ka \in \mathcal{A}$.

Lemme 2.1 :

Si \mathcal{A} est un ensemble k -stable, toute partition de n à sommants dans \mathcal{A} est équivalente à une partition $(2k - 2)$ -réduite.

En effet, il suffit de remarquer que (x, x, x, \dots, x) de longueur $(2k - 1)$ est équivalente à (x, x, \dots, kx) obtenue en remplaçant les k derniers sommants par kx , ces deux suites représentant le même ensemble à savoir $\{x, 2x, 3x, \dots, (2k - 1)x\}$. Tant que la partition considérée contient des sommants qui sont répétés au moins $(2k - 2)$ fois, on la remplace par une partition équivalente plus courte par ce procédé.

Application :

Comme \mathbb{N}^* est 2-stable, on obtient

$$\hat{p}(n) = \hat{q}(n, 2) \leq q(n, 2)$$

et les équivalents de $p(n)$ et de $q(n, 2)$ donnent alors le Théorème 3.

Chapitre 3

Calcul des équivalents de $p(n)$ et de $q(n, k)$

3.1 Énoncé

Le but de ce chapitre est l'obtention des équivalents de $p(n)$ et de $q(n, k)$ qui nous ont déjà servi. On va donc montrer le théorème suivant :

Théorème 4 :

Si $p(n)$ désigne le nombre de partitions de l'entier n , et $q(n, k)$ le nombre de partitions k -réduites, alors on a les équivalents suivants :

$$(4) \quad p(n) \sim \frac{\exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right)}{4\sqrt{3}n}$$

et

$$(5) \quad q(n, k) \sim \frac{k^{1/4}}{2(k+1)^{3/4}6^{1/4}} \frac{1}{n^{3/4}} \exp\left(2\pi\sqrt{\frac{kn}{6(k+1)}}\right).$$

En particulier, pour $k = 1$, on obtient

$$(6) \quad q(n) \sim \frac{1}{4(3n^3)^{1/4}} \exp\left(\pi\sqrt{\frac{n}{3}}\right).$$

3.2 Un théorème taubérien

Ces équivalents ont été obtenus par Hardy et Ramanujan (cf [7]). Leurs preuves donnent plus que ce comportement asymptotique, mais demandent une étude très détaillée des fonctions génératrices associées, basée sur la théorie des transformations des fonctions modulaires. Suivant la démonstration de A. E. Ingham (cf [8]), le Théorème 4 est ici déduit du Théorème 5, un théorème taubérien pour l'intégrale

$$(9) \quad f(s) = \int_0^\infty e^{-us} dA(u) \text{ avec } A(0) = 0 \text{ et } s = \sigma + it.$$

Soient ϕ et χ deux fonctions, et D un domaine du plan complexe, satisfaisant :

a) ϕ et χ sont holomorphes dans D , réelles et positives sur un segment $]0, h[$ inclus dans D ,

b) $-\sigma\phi'(\sigma)$ croît vers $+\infty$ quand σ décroît vers 0, d'où

$$(10) \quad \sigma\phi''(\sigma) \geq -\phi'(\sigma) > 0$$

pour σ assez petit,

c)

$$\frac{\phi''(\sigma)^{1/2}}{-\phi'(\sigma)} = o\left(\frac{\delta(\sigma)}{\sigma}\right)$$

quand σ décroît vers 0, où $\delta(\sigma)$ est la distance de σ au complémentaire de D ; a) et b) impliquent $0 \notin D$ d'où

$$(11) \quad \delta(\sigma) \leq \sigma,$$

d)

$$\phi''(\sigma + z) = O(\phi''(\sigma)),$$

$$\chi(\sigma + z) = O(\chi(\sigma)),$$

uniformément par rapport à z pour $|z| < \delta(\sigma)$ quand σ décroît vers 0.

Posons :

$$f_0(s) = \chi(s)e^{\phi(s)}, \quad F_0(s) = \frac{f_0(s)}{s},$$

$$A_0(\omega) = \frac{F_0(\sigma)e^{\omega\sigma}}{(2\pi\phi''(\sigma))^{1/2}}$$

où $\sigma = \sigma_\omega$ est l'unique solution (l'existence et l'unicité sont assurées pour ω réel assez grand par a) et b)) de

$$(12) \quad -\phi'(\sigma) = \omega.$$

Dans ces conditions, on a :

Théorème 5 :

Supposons que l'intégrale (9) converge pour $\sigma > 0$ et que :

- (i) $f(s) \sim f_0(s)$ quand $s \rightarrow 0$ dans D ,
- (ii) $f(s) = O(f_0(|s|))$ quand $s \rightarrow 0$ dans un angle Δ de la forme

$$|t| \leq \Delta\sigma, (0 < \Delta < \infty),$$

- (iii) $A(u)$ croît pour $u \geq 0$.

Alors il existe deux réels strictement positifs $L(\Delta)$ et $U(\Delta)$ tels que :

$$(13) \quad L(\Delta) \leq \underline{\lim}_{u \rightarrow \infty} \frac{A(u)}{A_0(u)} \text{ et } \overline{\lim}_{u \rightarrow \infty} \frac{A(u)}{A_0(u)} \leq U(\Delta),$$

avec $L(\Delta)$ et $U(\Delta) \rightarrow_{\Delta \rightarrow \infty} 1$.

Donc, si (ii) est vrai pour tout Δ fixé, alors

$$A(u) \sim_{u \rightarrow \infty} A_0(u).$$

On commence par les deux lemmes suivants :

Lemme 3.1 : *On a, uniformément par rapport à z , pour $|z| \leq \tau(\sigma) = o(\delta(\sigma))$, quand σ décroît vers 0,*

$$\frac{f_0(\sigma + z)}{f_0(\sigma)} = e^{z\phi'(\sigma) + \frac{1}{2}z^2\phi''(\sigma)} (1 + o(|z|^2\phi''(\sigma) + 1)) e^{\epsilon|z|^2\phi''(\sigma)}$$

pour tout $\epsilon > 0$ fixé.

Par définition de f_0 ,

$$(14) \quad \frac{f_0(\sigma + z)}{f_0(\sigma)} = \frac{\chi(\sigma + z)}{\chi(\sigma)} e^{\phi(\sigma + z) - \phi(\sigma)}.$$

Par a) et d), on a

$$(15) \quad \chi'(\sigma + z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\chi(\sigma + \zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta = O\left(\frac{\chi(\sigma)}{\delta(\sigma)}\right),$$

où Γ est le cercle de centre z , de rayon $\delta(\sigma)/2$, et ceci uniformément pour z convenable. On obtient par intégration

$$\chi(\sigma + z) - \chi(\sigma) = o(\chi(\sigma)).$$

On procède de même pour ϕ et on obtient par une double intégration :

$$\phi(\sigma + z) - \phi(\sigma) = z\phi'(\sigma) + 1/2z^2\phi''(\sigma) + o(|z|^2\phi''(\sigma)).$$

On a ainsi :

$$\frac{f_0(\sigma + z)}{f_0(\sigma)} = e^{z\phi'(\sigma) + 1/2z^2\phi''(\sigma)} e^{o(1 + |z|^2\phi''(\sigma))}.$$

Il suffit alors d'utiliser $|e^Z - 1| \leq Ze^Z$ pour écrire, avec $Z = 1 + \epsilon|z|^2\phi''(\sigma)$:

$$\begin{aligned} e^{o(1 + |z|^2\phi''(\sigma))} &= e^{o(1 + \epsilon|z|^2\phi''(\sigma))} = 1 + o(e^Z - 1) \\ &= 1 + o(Ze^Z) = 1 + o(1 + |z|^2\phi''(\sigma))e^{\epsilon|z|^2\phi''(\sigma)}, \end{aligned}$$

d'où la formule désirée.

Lemme 3.2 : $f_0(\sigma)$ croît pour σ décroissant vers 0.

Appliquant (15) avec $z = 0$, on obtient

$$\frac{-f_0'(\sigma)}{f_0(\sigma)} = -\phi'(\sigma) - \frac{\chi'(\sigma)}{\chi(\sigma)} = -\phi'(\sigma) + O(1/\delta(\sigma)) \sim -\phi'(\sigma)$$

d'après c), (11) et b). Donc $-f_0'(\sigma) > 0$ pour σ assez petit.

Preuve du Théorème 5 :

Dans tout ce qui suit les limites sont relatives à σ décroissant vers 0 ou, ce qui est équivalent à ω croissant vers ∞ . L'intégration par parties de la formule (9) donne

$$\int_0^\infty A(u)e^{-us} du = \frac{f(s)}{s} = F(s).$$

Dans celle-ci, on change s en $\sigma + z$, on multiplie par $k(z/T)e^{\xi z}$, où $T > 0$, ξ est réel, et k est une fonction holomorphe au voisinage de $[0, i]$, et on intègre le long d'un chemin l de 0 à iT . Cela donne

$$(16) \quad \int_0^\infty A(u)e^{-u\sigma} K(Tu - T\xi)T du = \int_0^{iT} F(\sigma + z)k(z/T)e^{\xi z} dz,$$

où

$$(17) \quad K(v) = \int_0^i k(Z)e^{-vZ} dZ$$

pris le long du chemin L correspondant à l par $z = TZ$, pourvu que $\Re(\sigma + z) > 0$ en tout point z de l .

Prenons

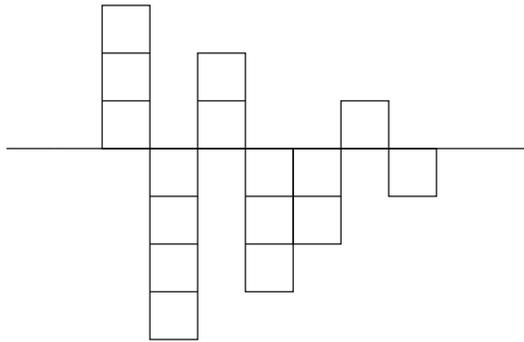
$$(18) \quad \xi = \xi(\sigma) = \omega + O(\sigma^{-1}) = -\phi'(\sigma) + O(\sigma^{-1}),$$

$$(19) \quad T = T(\sigma) = \Delta\sigma$$

et supposons que $k(0) \neq 0$. Soit $l = l(\sigma)$ formé du segment l_1 de 0 à $i\tau$ et de la ligne brisée l_2 de $i\tau$ à iT constituée de deux segments à gauche et inclinés à $\tan^{-1} \tau/\sigma$ par rapport à $[i\tau, iT]$, où $\tau = \tau(\sigma)$ est choisi tel que

$$(20) \quad \sigma \frac{\phi''(\sigma)^{1/2}}{-\phi'(\sigma)} = o(\tau(\sigma)) \text{ et } \tau(\sigma) = o(\delta(\sigma)).$$

Notons que ce choix est rendu possible par c) et que L tend à coïncider avec $[0, i]$.



On calcule alors séparément les contributions de l_1 et l_2 à l'intégrale et on montre (en utilisant les Lemmes 3.1 et 3.2) que :

- la contribution de l_1 est équivalente à

$$\frac{ik(0)F_0(\sigma)(\pi/2)^{1/2}}{\phi''(\sigma)^{1/2}},$$

- celle de l_2 est négligeable devant $\frac{F_0(\sigma)}{\phi''(\sigma)^{1/2}}$.

Donc en substituant dans (16), et en posant $u = \xi + v/T$ on obtient

$$(21) \quad \int_{-T\xi}^{\infty} A(\xi + v/T)e^{-v\sigma/T} K(v)dv \sim ik(0)\pi A_0(\omega)e^{(\xi-\omega)\sigma},$$

En prenant, successivement $k(Z) = 2(Z - i)$ puis $k(Z) = 2(Z - i) - \frac{e^{\mu z} - e^{-\mu z}}{\mu}$, où $\mu > 0$, $\mu \equiv 0(2\pi)$, par un calcul on obtient pour tout réel λ

$$\begin{aligned} \overline{\lim} \frac{A(\omega)}{A_0(\omega)} &\leq \frac{2\pi e^{2\lambda/\Delta}}{\int_{-\lambda}^{\lambda} \left(\frac{\sin(v/2)}{v/2} \right)^2 dv}, \\ \lim \frac{A(\omega)}{A_0(\omega)} &\geq \frac{2\pi e^{-2\mu/\Delta}}{\int_{-\mu}^{\mu} \left(\frac{\sin(v/2)}{v/2} \right)^2 \frac{\mu^2}{\mu^2 - v^2} dv} \end{aligned}$$

d'où (13) en prenant $\lambda = \Delta^{1/2}$ et $\mu = 2\pi([\Delta^{1/2}] + 1)$ et le Théorème 5 est ainsi démontré.

Cas particulier :

Si on prend

$$\phi(s) = \beta^{-1}(M/s)^\beta, \quad \chi(s) = C(M/s)^{m\beta-1/2}, \quad (\beta, M, C > 0, m \in \mathbb{R})$$

alors

$$(22) \quad f_0(s) = C(M/s)^{m\beta-1/2} e^{\beta^{-1}(M/s)^\beta},$$

$$(23) \quad A_0(\omega) = \left(\frac{1-\alpha}{2\pi} \right)^{1/2} C(M\omega)^{m\alpha-1/2} e^{\alpha^{-1}(M\omega)^\alpha}, \quad (\alpha = \frac{\beta}{\beta+1}),$$

comme on peut le vérifier par un simple calcul. Pour D , on peut prendre n'importe quel domaine de la forme $|t| < \Delta_0\sigma$ avec $\Delta_0 > 0$.

3.3 Application aux partitions

Théorème 6 :

Soit $(\lambda_i)_{i \geq 1}$ une suite strictement croissante de réels strictement positifs, avec

$$(24) \quad N(u) = Bu^\beta + R(u), \quad (B > 0, \beta > 0),$$

où $N(u)$ est le nombre de λ_i inférieurs ou égaux à u , et

$$(25) \quad L(u) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^u \frac{R(v)}{v} dv = b \log u + c + o(1)$$

quand $u \rightarrow \infty$. Pour un réel l , soit $p(l)$ le nombre de solutions de $l = \sum_1^\infty r_i \lambda_i$ en les entiers r_i (la somme étant finie), et $p^*(l)$ le nombre de solutions avec $r_i = 0, 1$. Pour u réel et $h > 0$, on pose

$$P(u) = \sum_{l < u} p(l), \quad P_h(u) = \frac{P(u) - P(u-h)}{h},$$

et on définit P^* , P_h^* de manière analogue. Alors, quand $u \rightarrow \infty$,

$$(26) \quad P(u) \sim \left(\frac{1-\alpha}{2\pi} \right)^{1/2} e^c M^{-(b+1/2)\alpha} u^{(b+1/2)(1-\alpha)-1/2} e^{\alpha^{-1}(Mu)^\alpha},$$

$$(27) \quad P^*(u) \sim \left(\frac{1-\alpha}{2\pi} \right)^{1/2} 2^b (M^*u)^{-\alpha/2} e^{\alpha^{-1}(M^*u)^\alpha},$$

où

$$\alpha = \frac{\beta}{\beta+1}, \quad M = (B\beta\Gamma(\beta+1)\zeta(\beta+1))^{1/\beta}, \quad M^* = (1-2^{-\beta})^{1/\beta} M.$$

On a aussi

$$(28) \quad P_h(u) \sim \left(\frac{1-\alpha}{2\pi} \right)^{1/2} e^c M^{-(b-1/2)\alpha} u^{(b+1/2)(1-\alpha)-1/2} e^{\alpha^{-1}(Mu)^\alpha},$$

$$(29) \quad P_h^*(u) \sim \left(\frac{1-\alpha}{2\pi} \right)^{1/2} 2^b M^{*\alpha/2} u^{\alpha/2-1} e^{\alpha^{-1}(M^*u)^\alpha},$$

si h est une constante strictement positive telle que le membre de gauche est une fonction croissante de u (remarquons que tel est le cas dès que $h, 2h, 2^2h, \dots$ appartiennent tous à la suite (λ_i)).

Démonstration :

Par définition de $p(l)$, on a

$$g(s) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_l p(l) e^{-ls} = \prod_{i=1}^{\infty} (1 - e^{-\lambda_i s})^{-1}.$$

$$\begin{aligned} \log g(s) &= - \sum_{i=1}^{\infty} \log(1 - e^{-\lambda_i s}) = - \int_0^{\infty} \log(1 - e^{-us}) dN(u) \\ &= \int_0^{\infty} \frac{s}{e^{us} - 1} N(u) du = \frac{B}{s^\beta} \int_0^{\infty} \frac{(us)^\beta d(us)}{e^{us} - 1} - \int_0^{\infty} L(u) d\left(\frac{us}{e^{us} - 1}\right). \end{aligned}$$

Après calcul, on obtient

$$g(s) \sim e^c s^{-b} e^{\beta^{-1}(M/s)^\beta},$$

quand $s \rightarrow 0$ avec $|t| \leq \Delta\sigma$, pour tout $\Delta > 0$. Mais

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-us} dP(u) &= g(s), \\ \int_0^{\infty} e^{-us} dP_h(u) &= \frac{1 - e^{-hs}}{h} g(s), \end{aligned}$$

et $\frac{1 - e^{-hs}}{h} \sim s$. Il suffit alors d'appliquer les résultats des cas particuliers du Théorème 5 pour obtenir (26) et (28). Les formules (27) et (29) s'obtiennent de même par

$$g^*(s) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_l p^*(l) e^{-ls} = \prod_{i=1}^{\infty} (1 + e^{-\lambda_i s}),$$

$$g^*(s) \sim 2^b e^{\beta^{-1}(M^*/s)^\beta},$$

quand $s \rightarrow 0$ avec $|t| \leq \Delta\sigma$, pour tout $\Delta > 0$.

On peut alors conclure.

Cas particuliers :

Les formules (4) et (6) se déduisent de (28) et (29), en prenant $\lambda_i = i$ et $h = 1$, vu que

$$(30) \quad \int_0^u \frac{[v] - v}{v} dv = \sum_{i \leq u} \log \frac{u}{i} - u = -\frac{1}{2} \log u - \frac{1}{2} \log 2\pi + o(1)$$

quand $u \rightarrow \infty$ (d'après la formule de Stirling), et $\Gamma(2)\zeta(2) = \pi^2/6$. On obtient aussi la formule (6) en prenant $\lambda_i = 2i - 1$ (en vertu du théorème d'Euler). Puis, par exemple en remarquant que si $h_k(s)$ désigne la fonction génératrice des $q(n, k)$, définie de la même manière que $g(s)$ plus haut, alors

$$h_k(s) = \frac{g(s)}{g((k+1)s)} \sim (k+1)^b e^{\beta^{-1}(M/s)^\beta \left(1 - \frac{1}{(k+1)^\beta}\right)},$$

formule de laquelle on déduit (5) en appliquant le cas particulier du Théorème 5.

Remarque :

On peut aussi déduire de ce travail une formule asymptotique pour le nombre de partitions d'un entier n en parts qui sont des puissances l -ièmes d'entiers, où l est un entier, en prenant $\lambda_i = i^l$, la vérification de (24) et (25), avec $\beta = 1/l$, $B = 1$, $b = -1/2$, $c = -l/2 \log 2\pi$ reposant sur une formule analogue à (30). On retrouve de cette manière les résultats de E. M. Wright ([14]). Ainsi, par exemple, si $p_2(n)$ est le nombre de partitions à parts carrées représentant n on a

$$p_2(n) \sim \frac{\zeta(3/2)^{2/3}}{2^{7/3} \sqrt{3} \pi^{7/6}} \frac{1}{n^{7/6}} \exp\left(3 \left(\frac{\pi}{16} \zeta^2(3/2) n\right)^{1/3}\right).$$

Chapitre 4

Étude des partitions ne représentant pas un entier donné

4.1 Les résultats

Dans ce chapitre, on se propose d'étudier le nombre de partitions ne représentant pas un entier a donné.

Il nous faut définir certaines notations utilisées dans cette partie et la suivante.

Par convention, on étend à tout \mathbb{R} toutes les fonctions définies sur \mathbb{N} en posant, par exemple pour p , $p(x) = p([x])$.

On note $r(n, m)$ le nombre de partitions de n en parts $\geq m$. Si a est un entier inférieur à n , on définit $\mathcal{R}(n, a)$ comme l'ensemble des partitions de n ne représentant pas a , et $R(n, a)$ désignera son cardinal.

On s'intéresse aussi aux partitions à parts distinctes et on définit dans ce cas les mêmes grandeurs que ci-dessus avec les notations $\rho(n, m)$, $\mathcal{Q}(n, a)$ et $Q(n, a)$ correspondantes. On définit aussi $Q(n, a, 2)$ comme étant le nombre de partitions 2-réduites de n ne représentant pas a .

Remarquons que comme $R(n, a) = R(n, n - a)$ et $Q(n, a) = Q(n, n - a)$, on peut se restreindre à l'étude de ces quantités pour $a \leq n/2$.

Théorème 7 :

Pour n assez grand et

$$(31) \quad 10^{18} \sqrt{n} \leq a \leq n^{5/7},$$

on a

$$(32) \quad Q(n, a) \leq q(n/2) \exp(5.10^3 a^{-1/3} n^{2/3} \log(a^{1/3} n^{-1/6}))$$

et

$$(33) \quad R(n, a) \leq p(n/2) \exp(5.10^3 a^{-1/3} n^{2/3} \log(a^{1/3} n^{-1/6})).$$

Théorème 8 :

Pour n assez grand et

$$(34) \quad n^{5/7} < a \leq n/2,$$

on a

$$(35) \quad Q(n, a) \leq q(n/2) \exp(n^{1/2-1/30})$$

et

$$(36) \quad R(n, a) \leq p(n/2) \exp(n^{1/2-1/30}).$$

La preuve de ces deux théorèmes est très conséquente, aussi ne sera-t-elle ici qu'esquissée, renvoyant à des références pour les passages qui ne peuvent figurer ici (la référence pour le déroulement de la preuve est [6]). On va tout d'abord citer une série de lemmes dont la plupart seront démontrés vu l'intérêt de leur démonstration, après avoir introduit d'autres notations utilisées dans ceux-ci :

$p(n, m)$ est le nombre de partitions de n en parts $\leq m$.

Si \mathcal{A} est un ensemble d'entiers non nécessairement distincts, alors \mathcal{A}' est l'ensemble des éléments distincts de \mathcal{A} , $S(\mathcal{A}) = \sum_{a \in \mathcal{A}} a$, et

$$P(\mathcal{A}) = \left\{ \sum_{a \in \mathcal{A}} \epsilon_a a, \epsilon_a = 0, 1, \sum_{a \in \mathcal{A}} \epsilon_a \neq 0 \right\}$$

l'ensemble des sous-sommes non nulles de \mathcal{A} ,

$$\mathcal{L}(\mathcal{A}, d) = \{i, 1 \leq i \leq d, \text{ il existe } a, a' \in \mathcal{A}, a, a' \equiv i[d]\}$$

et

$$L(\mathcal{A}, d) = |\mathcal{L}(\mathcal{A}, d)|.$$

4.2 Lemmes sur les partitions

Lemme 4.1 :

Soit $s(m)$ le plus petit entier qui ne divise pas m . Alors pour tout $m \geq 2$, on a

$$s(m) < \frac{3}{\log 2} \log m < 4.5 \log m.$$

Remarquons que si m est impair, $s(m) = 2$ et le lemme est vrai. Maintenant, si m est pair, $s(m) \geq 3$. Soit $\psi(x)$ la fonction de Chebychev :

$$\psi(x) = \sum_{p^k \leq x} \log p.$$

On sait (cf [13] § 1.2) que pour tout entier $n \geq 2$,

$$\psi(n)/n \geq (\log 2)/2.$$

Alors

$$\log m \geq \psi(s(m) - 1) \geq \frac{\log 2}{2}(s(m) - 1)$$

ce qui implique

$$s(m) \leq 1 + \frac{2 \log m}{\log 2} < \frac{3}{\log 2} \log m.$$

Lemme 4.2 :

Soit α un réel tel que $0 < \alpha \leq 1.05$. Pour $m \leq \alpha\sqrt{n}$, on a

$$p(n, m) < \exp\left(\left(2\alpha \log \frac{3.6}{\alpha}\right)\sqrt{n}\right).$$

Rappelons l'inégalité "classique" :

$$(37) \quad m! p(n, m) \leq \binom{n + \frac{m(m+1)}{2} - 1}{m - 1},$$

Pour montrer (37), si on introduit $p'(n, m)$, le nombre de partitions de n dont la plus grande part est égale à m , en observant que

$$p'(n, m) = p'(n - m, m) + p'(n - 1, m - 1)$$

on a

$$\begin{aligned} p'(n, m) + p'(n-1, m) + \dots + p'(n-m+1, m) &= \sum_{k=m}^n p'(k-1, m-1) \\ &\geq mp'(n-m+1, m). \end{aligned}$$

On montre alors par récurrence sur m

$$m! p'(n, m) \leq \binom{n-1 + \frac{m(m-1)}{2}}{m-1}.$$

La récurrence est aisée : il suffit de remarquer que $\sum_{j=p}^q \binom{j}{i} \leq \binom{q+1}{i+1}$. Et on conclut, vu que

$$p(n, m) = p'(n+m, m).$$

En observant que $n(n-1)\dots(n-k+1) \leq (n-(k-1)/2)^k$, on déduit de (37) que

$$p(n, m) \leq \frac{n^{m-1}}{m! (m-1)!} \left(1 + \frac{m^2}{2n}\right)^{m-1} \leq \frac{n^m}{(m!)^2} \left(1 + \frac{m^2}{2n}\right)^m.$$

Comme $m! \geq m^m e^{-m} \sqrt{2\pi m}$, on obtient

$$p(n, m) \leq \exp(m^3/2n + m(\log n + 2 - 2 \log m)).$$

Le membre de droite étant croissant par rapport à m , on a finalement

$$p(n, m) \leq \exp((\alpha^3/2 + 2\alpha(1 - \log \alpha))\sqrt{n}),$$

et la conclusion en découle facilement vu que si $\alpha \leq 1.05$, $\alpha^2/4 + 1 < \log 3.6$.

Remarque : on peut tirer de ce lemme des majorations de $r(n, m)$ et $\rho(n, m)$ en remarquant que

$$(38) \quad \rho(n, m) \leq r(n, m) \leq p(n, \lceil n/m \rceil),$$

car $p(n, m)$ est aussi le nombre de partitions de n en au plus m parts.

Lemme 4.3 :

Si $Y(n, t, m)$ désigne le nombre de partitions de n en parts distinctes avec au plus t sommants $\leq m$. On a

$$(39) \quad Y(n, t, m) \leq p(n, t + n/m).$$

Une partition comptée dans $Y(n, t, m)$ a au plus t parts $\leq m$ et n/m parts $> m$. Le membre de droite est visiblement plus grand que le nombre de partitions de n avec au plus $t + n/m$ parts.

Lemme 4.4 :

Si $Z(n, t, m)$ désigne le nombre de partitions de n ayant au plus t parts distinctes $\leq m$. Pour $1 \leq t \leq m \leq n$, on a

$$(40) \quad Z(n, t, m) \leq 6tn^2 \binom{m}{\min(t, \lfloor m/2 \rfloor)} p(n, t) p(n, n/m).$$

Pour $\mathcal{A} \subset \{1, 2, \dots, m\}$, $\mathcal{A} = \{a_1 < a_2 < \dots < a_s\}$, soit $P(n, \mathcal{A}, m)$ le nombre de partitions de n dont toutes les parts $\leq m$ sont dans \mathcal{A} , i. e. $P(n, \mathcal{A}, m)$ est le nombre de solutions de

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_sx_s + \sum_{i=1}^{n-m} (m+i)x_{s+i} = n, \quad (x_i \in \mathbb{N}).$$

Alors on a

$$P(n, \mathcal{A}, m) \leq \sum_{k=0}^n P(k, \{1, 2, \dots, s\}, m)$$

vu que en remplaçant a_j par j dans l'équation ci-dessus, on a

$$x_1 + 2x_2 + \dots + sx_s + \sum_{i=1}^{n-m} (m+i)x_{s+i} = k$$

pour un $k \leq n$. On en tire

$$Z(n, t, m) \leq \sum_{s=0}^t \binom{m}{s} \sum_{k=0}^n P(k, \{1, 2, \dots, s\}, m)$$

car \mathcal{A} avec $|\mathcal{A}| = s$ peut être choisi parmi $\binom{m}{s}$ parties de $\{1, 2, \dots, m\}$. Donc

$$Z(n, t, m) \leq (t+1) \binom{m}{\min(t, \lfloor m/2 \rfloor)} \sum_{k=0}^n P(k, \{1, 2, \dots, t\}, m).$$

Maintenant, en comptant les partitions selon la somme j des parts inférieures à t , on obtient

$$P(k, \{1, 2, \dots, t\}, m) = \sum_{j=0}^k p(j, t) r(k - j, m + 1) \leq (k + 1) p(k, t) r(k, m + 1)$$

et on obtient (40) en utilisant (38).

Lemme 4.5 :

Si M et D sont des entiers ≥ 2 , soit $V(n, M, D)$ le nombre de partitions de $n \geq M$ en parts distinctes :

$$n = n_1 + n_2 + \dots + n_t$$

avec $\mathcal{N} = \{n_1, \dots, n_t\}$ tel que il existe un entier d ,

$$(41) \quad 2 \leq d \leq D,$$

et des entiers

$$(42) \quad i_1 < i_2 < \dots < i_{[d/2]} \leq d$$

tels que, si $\mathcal{N}_1 = \{n_l, n_l \in \mathcal{N}, d \leq n_l \leq M, n_l \equiv i_j[d] \text{ pour un } j\}$, le cardinal de $\mathcal{N}_2 = \{n_l, n_l \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_1, n_l \leq M\}$ vérifie

$$(43) \quad |\mathcal{N}_2| \leq 2D,$$

alors

$$(44) \quad V(n, M, D) \leq n^{5D} q([n/2]) p(n, n/M).$$

Soit $\mathcal{N}_3 = \mathcal{N} \setminus (\mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2) = \{n_l, n_l \in \mathcal{N}, n_l > M\}$.

Fixons $d, i_1, i_2, \dots, i_{[d/2]}$ dans (41) et (42). Par définition de \mathcal{N}_1 , tout élément m de \mathcal{N}_1 peut s'écrire sous la forme

$$(45) \quad m = i_{j(m)} + l(m)d, \quad 1 \leq j(m) \leq [d/2] \text{ et } 1 \leq l(m).$$

À tout $m \in \mathcal{N}_1$, on associe l'entier

$$m^* = j(m) + (l(m) - 1)[d/2],$$

et on écrit $\mathcal{N}_1^* = \{m^*, m \in \mathcal{N}_1\}$. Visiblement, (45) implique que à différents éléments de \mathcal{N}_1 sont associés différents éléments de \mathcal{N}_1^* . De plus, on a

$$m^* \leq l(m)[d/2] \leq m/2$$

d'où

$$S(\mathcal{N}_1^*) \leq \frac{1}{2}S(\mathcal{N}_1).$$

Donc en écrivant $S(\mathcal{N}_1) = u$, les éléments de \mathcal{N}_1^* forment une partition d'un entier $v \leq u/2$ en parts distinctes, de telle sorte que $d, i_1, i_2, \dots, i_{[d/2]}$ et u fixés, le nombre de choix pour \mathcal{N}_1 est majoré par

$$\sum_{v=0}^{[u/2]} q(v) \leq ([u/2] + 1)q([u/2]) \leq nq([n/2]).$$

De plus, les éléments de \mathcal{N}_2 sont choisis parmi $\{1, 2, \dots, M\}$ et, par (43), leur nombre est au plus $2D$, si bien que \mathcal{N}_2 peut être choisi d'au plus $M^{2D} \leq n^{2D}$ façons différentes.

Enfin, si $d, i_1, \dots, i_{[d/2]}$ et u sont fixés, alors

$$z = S(\mathcal{N}_3) = (S(\mathcal{N}_1) + S(\mathcal{N}_2) + S(\mathcal{N}_3)) - S(\mathcal{N}_1) - S(\mathcal{N}_2) \leq n - u.$$

Ainsi \mathcal{N}_3 est une partition de z en parts $\geq M + 1$. Donc le nombre de choix pour \mathcal{N}_3 est majoré par

$$\sum_{z=0}^{n-u} \rho(z, M + 1) \leq (n + 1)\rho(n, M) \leq n^2\rho(n, M).$$

En rassemblant les résultats précédents, on obtient que pour $d, i_1, \dots, i_{[d/2]}$ fixés, la partition \mathcal{N} peut être choisie d'au plus

$$n^{2D+3}q([n/2])\rho(n, M)$$

manières différentes. Mais pour d fixé, les $i_1, \dots, i_{[d/2]}$ peuvent être choisis d'au plus 2^d façons différentes, et la sommation sur d donne

$$\sum_{d \leq D} 2^d < 2^{D+1} \leq n^{D+1},$$

et on conclut en appliquant (38).

Lemme 4.6 :

Si on reprend les mêmes notions qu'au Lemme 4.5, mais en considérant des partitions quelconques (pas forcément 1-réduites), et en définissant $W(n, M, D)$ l'analogue de $V(n, M, D)$, alors sous les mêmes hypothèses, on a

$$W(n, M, D) \leq n^{7D} p(\lfloor n/2 \rfloor) p(n, n/M).$$

La démonstration est semblable à la précédente. Le seul point qui diffère est $|\mathcal{N}_2|$: dans ce cas le nombre d'éléments distincts de \mathcal{N}_2 est au plus $2D$ donc il peuvent être choisis d'au plus $M^{2D} \leq n^{2D}$ façons différentes; et pour chaque élément il y a au plus n choix pour la multiplicité, donc pour tous les éléments il y a au total au plus $n^{2D} n^{2D} = n^{4D}$ choix; le reste de la preuve étant similaire, ceci explique le facteur n^{2D} supplémentaire.

4.3 Lemmes additifs

Lemme 4.7 :

Si $d \in \mathbb{N}$ et $n_1, n_2, \dots, n_d \in \mathbb{N}$, il existe alors une somme de la forme $n_{i_1} + \dots + n_{i_t}$, ($1 \leq i_1 < \dots < i_t \leq d$) telle que

$$d | n_{i_1} + \dots + n_{i_t}.$$

En effet, s'il existe $k \leq d$ tel que $d | S_k = n_1 + n_2 + \dots + n_k$, on en reste là. Sinon, S_1, \dots, S_d ne sont pas congrus à 0 modulo d donc il y en a deux qui sont dans la même classe modulo d . Ainsi il existe $k < l$ tels que

$$d | n_{k+1} + \dots + n_l.$$

Lemme 4.8 :

Si $N \in \mathbb{N}$, $d \in \mathbb{N}$, et \mathcal{B} un ensemble fini d'entiers tel que

$$(46) \quad \mathcal{B} \subset \{1, 2, \dots, N\},$$

alors pour tout entier n tel que $0 \leq n \leq \frac{1}{d}S(\mathcal{B}) - N$, il existe un élément x_n de $\{n+1, n+2, \dots, n+N\}$ tel que $dx_n \in \mathcal{P}(\mathcal{B})$.

Il suffit de prouver l'existence d'entiers y_1, y_2, \dots, y_t tels que $0 < y_1 \leq N$, $0 < y_i - y_{i-1} \leq N$ (pour $i = 2, 3, \dots, t$), $\frac{1}{d}S(\mathcal{B}) - N < y_t$ et $dy_i \in \mathcal{P}(\mathcal{B})$ pour $i = 1, 2, \dots, t$.

Nous allons définir ces y_i par récurrence. Nous pouvons supposer que $S(\mathcal{B}) \geq dN$, ce qui implique par (46) que $|\mathcal{B}| \geq d$. Soit $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}$, $|\mathcal{B}_1| = d$. Alors par le Lemme 4.7, on en déduit qu'il existe une partie non vide \mathcal{B}_1^* de \mathcal{B}_1 telle que $d|S(\mathcal{B}_1^*)|$. On écrit $S(\mathcal{B}_1^*)/d = y_1$ et on vérifie que

$$dy_1 = S(\mathcal{B}_1^*) = \sum_{b \in \mathcal{B}_1^*} b \leq \sum_{b \in \mathcal{B}_1^*} N \leq Nd$$

donc y_1 convient.

Supposons qu'on ait défini y_1, y_2, \dots, y_{i-1} avec

$$(47) \quad y_{i-1} \leq \frac{1}{d}S(\mathcal{B}) - N.$$

Par définition de y_{i-1} , il existe une partie \mathcal{B}_{i-1}^* de \mathcal{B} telle que $S(\mathcal{B}_{i-1}^*) = dy_{i-1}$. Alors par (47), on a

$$(48) \quad S(\mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_{i-1}^*) = S(\mathcal{B}) - dy_{i-1} \geq Nd.$$

La formule (46) implique que

$$S(\mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_{i-1}^*) = \sum_{b \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_{i-1}^*} b \leq \sum_{b \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_{i-1}^*} N = N|\mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_{i-1}^*|.$$

On en tire

$$|\mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_{i-1}^*| \geq d.$$

Donc il existe une partie \mathcal{B}_i de $\mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_{i-1}^*$ avec $|\mathcal{B}_i| = d$. D'après le Lemme 4.7, il existe une partie non vide \mathcal{B}'_i de \mathcal{B}_i telle que $d|S(\mathcal{B}'_i)|$. Soit $y_i = y_{i-1} + d^{-1}S(\mathcal{B}'_i)$. On a alors

$$y_{i-1} < y_i = y_{i-1} + d^{-1} \sum_{b \in \mathcal{B}'_i} b \leq y_{i-1} + d^{-1} \sum_{b \in \mathcal{B}'_i} N \leq y_{i-1} + N$$

et

$$dy_i = S(\mathcal{B}_{i-1}^*) + S(\mathcal{B}'_i) \in \mathcal{P}(\mathcal{B}),$$

ce qui complète la preuve du lemme.

Lemme 4.9 :

Soit $N \in \mathbb{N}$,

$$(49) \quad N > 2500,$$

$\mathcal{A} \subset \{1, 2, \dots, N\}$ et

$$(50) \quad |\mathcal{A}| > 100(N \log N)^{1/2}.$$

Alors il existe des entiers d, y, z tels que

$$(51) \quad 1 \leq d < 10^4 \frac{N}{|\mathcal{A}|},$$

$$(52) \quad z > \frac{|\mathcal{A}|^2}{7 \cdot 10^4},$$

$$(53) \quad 1 \leq y < 7 \cdot 10^4 \frac{N}{|\mathcal{A}|^2} z$$

et

$$(54) \quad \{yd, (y+1)d, \dots, zd\} \subset \mathcal{P}(\mathcal{A}).$$

Ce Lemme 4.9 est en fait le Theorem 4 de l'article [11], et il ne sera pas redémontré ici, sa démonstration étant par trop longue.

On peut cependant légitimement se demander d'où vient un tel théorème. Il vient en fait d'une longue suite de résultats sur la densité de certaines suites, ou plus exactement de la somme de certaines suites (travaux de Mann, Dyson, Kneser ; cf [4], [9]). Pour être plus précis, Sárközy le déduit du

Théorème 9 :

Soient $N, k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A} \subset \{1, 2, \dots, N\}$, et

$$|\mathcal{A}| > \frac{N}{k} + 1.$$

Alors il existe des entiers d, l, m tels que

$$1 \leq d \leq k - 1,$$

$$1 \leq l < 118k,$$

et

$$\{(m+1)d, (m+2)d, \dots, (m+N)d\} \subset l\mathcal{A}$$

où

$$l\mathcal{A} \stackrel{\text{def}}{=} \{a_1 + a_2 + \dots + a_l, a_1, a_2, \dots, a_l \in \mathcal{A}\}.$$

Il convient aussi de voir pourquoi il apparaît dans la démonstration des Théorèmes 7 et 8. L'idée de la démonstration du lemme 4.10 ci-dessous, qui est le lemme-clé de la preuve, est d'arriver à prouver que pour un ensemble \mathcal{A} et un certain d convenable, $L(\mathcal{A}, d)$ est petit, ce qui permet d'appliquer les Lemmes 4.5 et 4.6 et d'obtenir ainsi des majorations. Et pour montrer que $L(\mathcal{A}, d)$ est petit, on utilise le Lemme 4.9 qui donne l'existence d'une grande suite arithmétique incluse dans un certain $\mathcal{P}(\mathcal{A})$.

Lemme 4.10 :

Soit $N \in \mathbb{N}$,

$$N > 10^{10},$$

δ un réel avec

$$0 < \delta \leq \frac{1}{2},$$

\mathcal{A} est un ensemble fini d'entiers $\leq N$,

$$|\mathcal{A}'| > 10^3(\delta^{-1}N)^{3/4}$$

et il existe un entier m avec

$$2 \cdot 10^7 \delta^{-2} N^2 |\mathcal{A}'|^{-1} < m < (1 - \delta)S(\mathcal{A}) \text{ et } m \notin \mathcal{P}(\mathcal{A}).$$

Alors il existe un entier d tel que

$$d < 11 \cdot 10^4 \delta^{-1} N |\mathcal{A}'|^{-1}$$

et

$$L(\mathcal{A}, d) \leq d/2$$

Ce lemme est un point crucial de la démonstration. La fin de la preuve des Théorèmes 7 et 8 sera l'application répétée de ce lemme avec des constantes bien choisies.

Vu la longueur, on ne donne ici que les grandes lignes de sa démonstration. Le lemme est démontré dans le cas $\delta = 1/2$, le cas général en étant une conséquence.

Soit $D = 11 \cdot 10^4 \delta^{-1} |\mathcal{A}'|^{-1}$. À tout $d \leq D$ et à tout $i \in \mathcal{L}(\mathcal{A}, d)$, on associe deux nombres $a(d, i)$ et $a'(d, i)$ dans \mathcal{A} tels que $a(d, i) \equiv a'(d, i) \equiv i \pmod{d}$

(avec soit $a(d, i) \neq a'(d, i)$ soit la multiplicité de $a(d, i)$ est au moins deux).
Soit

$$\mathcal{A}_0 = \cup_{d \leq D} \cup_{i \in \mathcal{L}(\mathcal{A}, d)} \{a(d, i), a'(d, i)\}.$$

Écrivons $(\mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_0)' = \{a_1, a_2, \dots, a_t\}$ où les a_i sont distincts. Soit $u = \lceil t\delta/8 \rceil$ et $\mathcal{A}_1 = \{a_1, a_2, \dots, a_u\}$ et on pose $\mathcal{A}_2 = (\mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_0) \setminus \mathcal{A}_1$. On vérifie alors que (on utilise ici que $\delta = 1/2$):

$$|\mathcal{A}_1| > \frac{\delta}{11} |\mathcal{A}'| > 75N^{3/4}$$

de sorte que l'on peut appliquer le Lemme 4.9 pour obtenir l'existence d'entiers d, y, z tels que

$$\begin{aligned} 1 \leq d &< 10^4 \frac{N}{|\mathcal{A}_1|} < 11 \cdot 10^4 \delta^{-1} N |\mathcal{A}'|^{-1}, \\ z &> \frac{|\mathcal{A}_1|^2}{7 \cdot 10^4} > 10^{-7} \delta^2 |\mathcal{A}'|^2, \\ 1 \leq y &< 7 \cdot 10^4 \frac{N}{|\mathcal{A}_1|^2} z < 10^7 \delta^{-2} N |\mathcal{A}'|^{-2} z, \end{aligned}$$

et

$$\{yd, (y+1)d, \dots, zd\} \subset \mathcal{P}(\mathcal{A}_1).$$

Il reste à vérifier que si on a un m satisfaisant

$$2 \cdot 10^7 \delta^{-2} N^2 |\mathcal{A}'|^{-1} < m < (1 - \delta)S(\mathcal{A}) \text{ et } m \notin \mathcal{P}(\mathcal{A}),$$

alors cela implique $L(\mathcal{A}, d) \leq d/2$. On raisonne par l'absurde en supposant au contraire que

$$L(\mathcal{A}, d) > d/2.$$

On montre tout d'abord que

$$\nu \in \mathbb{N}, y \leq \nu < (1 - \delta)S(\mathcal{A})/d \text{ implique } \nu d \in \mathcal{P}(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2).$$

Pour cela, on vérifie que $z - y > N$, ce qui implique que

$$\{yd, (y+1)d, \dots, (y+N-1)d\} \subset \mathcal{P}(\mathcal{A}_1).$$

On peut donc supposer $y + N \leq \nu \leq (1 - \delta)S(\mathcal{A})/d$. Si on pose $n = \nu - y - N$, on trouve que $0 \leq n < S(\mathcal{A}_2)/d - N$. On peut ainsi appliquer le Lemme 4.8 pour obtenir un entier x_n tel que

$$n + 1 \leq x_n \leq n + N$$

et

$$dx_n \in \mathcal{P}(\mathcal{A}_2).$$

Puis vu que

$$0 \leq n + N - x_n \leq N - 1$$

et

$$\nu - x_n = y + (n + N - x_n)$$

on a

$$(\nu - x_n)d \in \mathcal{P}(\mathcal{A}_1)$$

d'où l'assertion citée plus haut.

Soit

$$\mathcal{L}_m(\mathcal{A}, d) = \{m - i, i \in \mathcal{L}(\mathcal{A}, d)\}.$$

Alors les éléments de chacun des ensembles $\mathcal{L}(\mathcal{A}, d)$ et $\mathcal{L}_m(\mathcal{A}, d)$ sont non congrus deux à deux mod d et leur nombre total est $2L(\mathcal{A}, d) > d$. Par le principe des tiroirs, il existe un élément i_1 qui est congru à un élément $m - i_2$ mod d . Écrivons $a_m = a(d, i_1)$ et $a'_m = a(d, i_2)$ si $i_1 \neq i_2$ ou $a'_m = a'(d, i_1) = a'(d, i_2)$ si $i_1 = i_2$. Alors

$$d \mid m - a_m - a'_m,$$

et par définition de \mathcal{A}_0 , on a aussi

$$a_m + a'_m \in \mathcal{P}(\mathcal{A}_0).$$

De plus on vérifie que

$$yd < m - a_m - a'_m < (1 - \delta)S(\mathcal{A}),$$

et comme $(m - a_m - a'_m)/d = \nu$ est un entier, on a

$$\nu d = m - a_m - a'_m \in \mathcal{P}(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2).$$

Donc $m \in \mathcal{P}(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_0) = \mathcal{P}(\mathcal{A})$, ce qui est absurde.

4.4 Fin de la preuve des Théorèmes 7 et 8

Elle ne sera elle aussi qu'esquissée. À toute partition de n

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_t$$

on associe l'ensemble $\mathcal{N} = \{n_1, n_2, \dots, n_t\}$. Pour un nombre M , soit \mathcal{N}_0 l'ensemble des parts ne dépassant pas M . Pour prouver le Théorème 7, on prend

$$M = \lceil 10^{-3}(an)^{1/3} \rceil.$$

On doit distinguer deux cas.

Cas 1 : Supposons que

$$|\mathcal{N}'_0| > 8 \cdot 10^7 M^2 a^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} B.$$

On montre que si n est assez grand, on peut appliquer le Lemme 4.10 avec $M, \mathcal{N}_0, 1/2$ et a à la place de N, \mathcal{A}, δ et m respectivement, d'où l'existence d'un entier $d < 11 \cdot 10^4 2M |\mathcal{N}'_0|^{-1}$ avec

$$L(\mathcal{N}_0, d) \leq d/2.$$

Si on pose

$$D = 4a^{2/3}n^{-1/3},$$

alors $d < D$ et on vérifie que l'on peut appliquer le Lemme 4.5 ou 4.6. Ainsi le nombre de telles partitions ne représentant pas a est majoré par $V(n, M, D)$ ou $W(n, M, D)$.

Cas 2 : Supposons que

$$|\mathcal{N}'_0| \leq 8 \cdot 10^7 M^2 a^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} B.$$

Avec les notations des Lemmes 4.3 et 4.4, le nombre total de partitions de n est certainement plus petit que $Y(n, B, M)$ ou $Z(n, B, M)$.

Ainsi on a prouvé que

$$Q(n, a) \leq V(n, M, D) + Y(n, B, M)$$

et

$$R(n, a) \leq W(n, M, D) + Z(n, B, M).$$

En appliquant alors les Lemmes 4.3 et 4.5, en posant $\alpha = 2.10^3 a^{-1/3} n^{1/6}$ (on vérifie en utilisant (31) que l'on peut appliquer le Lemme 4.2), on obtient après calcul :

$$Q(n, a) \leq q(\lfloor n/2 \rfloor) \exp\left(5D \log n + \log 2 + \left(2\alpha \log \frac{3.6}{\alpha}\right) \sqrt{n}\right).$$

Et enfin comme $D = O(n^{1/7})$ et $\alpha \geq 2.10^3 n^{-1/14}$, on obtient (32). De même, en appliquant les Lemmes 4.2, 4.4 et 4.6, on obtient (33).

Pour prouver le Théorème 8, on choisit

$$M = \lfloor n^{15/28} \rfloor$$

et

$$\delta = 10^4 n^{-1/28}.$$

On définit \mathcal{N} et \mathcal{N}_0 de la même manière que pour la démonstration du Théorème 7 et on pose $\mathcal{N}^* = \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_0$. On doit distinguer trois cas.

Cas 1 : Supposons que

$$(1 - \delta)S(\mathcal{N}_0) \leq n/2$$

d'où pour n assez grand

$$S(\mathcal{N}_0) \leq (1/2 + \delta)n.$$

Si l'on fixe $S(\mathcal{N}_0) = k$, alors dans le cas des partitions à parts distinctes, \mathcal{N}_0 peut être choisi d'au plus $q(k)$ manières, et \mathcal{N}^* d'au plus $\rho(n - k, M + 1)$ manières. Donc le nombre de partitions est majoré par

$$T \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k < (1/2 + \delta)n} q(k) \rho(n - k, M + 1).$$

De même, le nombre de partitions à parts quelconques dans ce cas-là est majoré par

$$U \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k < (1/2 + \delta)n} p(k) r(n - k, M + 1).$$

En appliquant le Lemme 4.2, on obtient pour n assez grand

$$T < q(\lfloor n/2 \rfloor) \exp(n^{1/2 - 1/29})$$

et

$$U < p(\lfloor n/2 \rfloor) \exp(n^{1/2-1/29}).$$

Cas 2 : Supposons que

$$n/2 < (1 - \delta)S(\mathcal{N}_0)$$

et

$$|\mathcal{N}'_0| > B \stackrel{\text{def}}{=} 10^3 (\delta^{-1} M)^{3/4} > \frac{1}{2} n^{3/7}.$$

On montre dans ce cas que l'on peut appliquer le Lemme 4.10 et comme dans la démonstration du Théorème 7, le nombre de partitions dans ce cas est majoré par $V(n, M, D)$ ou $W(n, M, D)$.

Cas 3 : Supposons que

$$|\mathcal{N}'_0| \leq B \leq n^{3/7}.$$

Comme dans le Cas 2 du Théorème 7, le nombre de partitions est majoré par $Y(n, B, M)$ ou $Z(n, B, M)$.

Donc sous les hypothèses du Théorème 8, on a

$$Q(n, a) \leq T + V(n, M, D) + Y(n, B, M)$$

et

$$R(n, a) \leq U + W(n, M, D) + Z(n, B, M).$$

Enfin en utilisant les Lemmes 4.3 et 4.5, on obtient (35) et en utilisant les Lemmes 4.4 et 4.6, on obtient (36).

Chapitre 5

Amélioration des constantes

5.1 Énoncés des résultats

Dans cette section, forts de notre expérience, nous allons améliorer notre connaissance des comportements asymptotiques de $\hat{p}(n)$ et $\hat{q}(n)$.

Nous allons utiliser bon nombre de résultats des chapitres précédents, en vue de montrer le théorème suivant :

Théorème 10 :

Pour n assez grand, on a

$$(55) \quad \hat{q}(n) \leq q(n)^{0.955}$$

et

$$(56) \quad \hat{p}(n) \leq p(n)^{0.768}.$$

Remarque :

La démonstration suit essentiellement celle de l'article [1] auquel on a déjà souvent fait référence, mais une petite modification du Lemme 2.1 de l'article de J. Dixmier [2] nous a permis d'obtenir une légère amélioration du résultat obtenu en [1] (les exposants étant respectivement 0.96 et 0.773 dans cet article).

5.2 Deux lemmes

Commençons par le lemme dont il vient d'être question :

Lemme 5.1 :

Soit $\epsilon > 0$. S'il existe $\delta \in]0, 1[$ tel que, pour tout n , si a désigne un entier

$$\epsilon\sqrt{n} - 1 \leq a \leq 2\epsilon\sqrt{n} \Rightarrow R(n, a) \leq p(n)^\delta.$$

Alors, pour n assez grand

$$\frac{j}{2}\epsilon\sqrt{n} \leq a \leq \frac{(j+1)}{2}\epsilon\sqrt{n} \Rightarrow R(n, a) \leq (2p(\epsilon\sqrt{n}))^{j-1}p(n)^\delta$$

- pour $j = 2, 3, \dots, 2\lfloor\sqrt{n}/2\rfloor$ si $\epsilon < 1$,

- pour $j = 2, 3, \dots, \tau(n)$ avec $\tau(n) = o(\sqrt{n})$ (par exemple $\log n$) pour ϵ quelconque.

La démonstration se fait par récurrence sur j . C'est clair pour $j = 2, 3$ par hypothèse. Supposons $j \geq 4$ et le résultat vrai jusqu'à $j - 1$. Soit a tel que $\frac{j}{2}\epsilon\sqrt{n} \leq a \leq \frac{(j+1)}{2}\epsilon\sqrt{n}$. Soit $\Pi \in \mathcal{R}(n, a)$. Soit $b = \lfloor\epsilon\sqrt{n}\rfloor$.

Si b n'est pas représenté par Π , Π appartient à un ensemble \mathcal{E} tel que $|\mathcal{E}| \leq p(n)^\delta$.

Si b est représenté par Π , on a $\Pi = (\Pi', \Pi'')$, où $S(\Pi') = b$, $S(\Pi'') = n - b$ et Π'' ne représente pas $a - b$. On a

$$a - b \geq \frac{j}{2}\epsilon\sqrt{n} - \epsilon\sqrt{n} = \frac{j-2}{2}\epsilon\sqrt{n} \geq \epsilon\sqrt{n-b}$$

car $j \geq 4$, et

$$a - b \leq \frac{j+1}{2}\epsilon\sqrt{n} - \epsilon\sqrt{n} + 1 = \frac{j-1}{2}\epsilon\sqrt{n} + 1.$$

Or

$$\frac{j}{2}\epsilon\sqrt{n-b} \geq \frac{j}{2}\epsilon\sqrt{n}\left(1 - \frac{b}{n}\right) \geq \frac{j}{2}\epsilon\sqrt{n} - \epsilon\frac{j\epsilon\sqrt{n} + 1}{\sqrt{n}}.$$

Il reste à montrer que, au moins pour n assez grand

$$\frac{j-1}{2}\epsilon\sqrt{n} + 1 \leq \frac{j}{2}\epsilon\sqrt{n} - \epsilon\frac{j\epsilon\sqrt{n} + 1}{\sqrt{n}}.$$

- Si $\epsilon < 1$, vu que $j/2 \leq \sqrt{n}/2$, on se ramène à montrer que

$$-1/2\epsilon\sqrt{n} + 1 \leq -\epsilon^2\sqrt{n}/2 - \epsilon/2$$

ce qui est vrai pour n assez grand

- Dans le second cas on veut

$$-1/2\epsilon\sqrt{n} + 1 \leq -1/2\epsilon \frac{\tau(n)}{\sqrt{n}} \frac{\epsilon\sqrt{n} + 1}{\sqrt{n}}$$

ce qui est vrai pour n assez grand par hypothèse sur $\tau(n)$.

Donc finalement

$$\frac{j}{2}\epsilon\sqrt{n-b} \geq a-b.$$

L'hypothèse de récurrence s'applique et entraîne que Π'' appartient à un ensemble \mathcal{F} tel que

$$|\mathcal{F}| \leq (2p(\epsilon\sqrt{n}))^{j-2} p(n)^\delta.$$

Par conséquent, Π appartient à un ensemble \mathcal{G} tel que

$$|\mathcal{G}| \leq p((\epsilon\sqrt{n})) (2p(\epsilon\sqrt{n}))^{j-2} p(n)^\delta.$$

Donc

$$R(n, a) \leq p(n)^\delta + p((\epsilon\sqrt{n})) (2p(\epsilon\sqrt{n}))^{j-2} p(n)^\delta \leq (2p(\epsilon\sqrt{n}))^{j-1} p(n)^\delta.$$

Le lemme est ainsi démontré.

Remarquons immédiatement que le même résultat reste valable si l'on remplace tous les $R(n, a)$ par des $Q(n, a)$ ou par des $Q(n, a, 2)$, i. e. en considérant les partitions à parts distinctes ou 2-réduites (dans la démonstration, si Π est à parts distinctes, alors Π' et Π'' le sont a fortiori ; de même dans le cas des partitions 2-réduites).

Poursuivons avec un lemme un peu technique :

Lemme 5.2 :

(i) La fonction $y_1(x) = \frac{1}{2} \log(1+2x) - \log(1+x^2) + \frac{x^2 \log x}{2+x^2}$ est décroissante sur l'intervalle $[0.3, 1]$. On a $y_1(0.3) < 0.1$ et $y_1(x) < 0$ pour $x \in [0.623, 1]$.

(ii) La fonction $y_2(x) = \frac{1}{2} \log(1+2x+2x^2) - \log(1+x^2+x^4) + \frac{x^3(2x+1)\log x}{3+x^2+x^4}$ vérifie $y_2(x) < 0.18$ pour $0 \leq x \leq 1$ et $y_2(x) < 0$ pour $0.681 \leq x \leq 1$.

L'étude de ces deux fonctions se fait à l'aide du système de calcul formel Maple. Le calcul de la dérivée de y_1 montre que, pour $0 < x < 1$, la fonction y_1' est du signe de

$$z_1(x) = \log x - \frac{x^6 + x^5 + 5x^4 + 5x^3 + 4x^2 + 6x - 4}{8x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 4x}$$

et la dérivée z_1' est du signe du polynôme

$$P_1(x) = -4x^9 - 5x^8 + 10x^6 + 28x^5 + 47x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 12x - 4$$

En appliquant la méthode des suites de Sturm pour compter les zéros de P_1 entre 0 et 1, on trouve que P_1 n'a qu'une racine dans cet intervalle, et on en déduit les variations de y_1 :

L'étude de y_2 se fait de même avec une fonction auxiliaire z_2 et un polynôme P_2 plus compliqués. On obtient :

5.3 Application à la majoration de $Q(n, a)$ et $Q(n, a, 2)$

Lemme 5.3 :

(i) Pour a vérifiant $1.07\sqrt{n} \leq a \leq 2.14\sqrt{n}$, on a

$$(57) \quad \log Q(n, a) < 1.732\sqrt{n}.$$

(ii) Pour a vérifiant $0.81\sqrt{n} \leq a \leq 1.62\sqrt{n}$, on a

$$(58) \quad \log Q(n, a, 2) < 1.969\sqrt{n}.$$

Remarque :

C'est ici qu'apparaît le gain obtenu grâce à la modification du Lemme 2.1 de [2] (Lemme 5.1 ci-dessus). En effet, au lieu de se placer sur un intervalle $[x, 3x]$, on se place sur un intervalle du type $[x, 2x]$, ce qui permet d'obtenir des majorants un peu plus petits. Ceci est rendu possible vu les hypothèses un peu plus faibles du Lemme 5.1.

Démonstration de (i) :

Une partition de n ne représentant pas a ne peut à la fois contenir le sommant i et le sommant $a - i$. Si l'on définit $d(n)$ par la série génératrice

$$\sum_{n=0}^{\infty} d(n)x^n = \left(\prod_{1 \leq i \leq a/2} (1 + x^i + x^{a-i}) \right) \left(\prod_{i \geq a+1} (1 + x^i) \right),$$

qui est supérieure ou égale à la série génératrice des partitions à parts distinctes ne contenant pas à la fois le sommant i et le sommant $a - i$ (si a est pair, on compte 2 fois les partitions contenant le sommant $a/2$), donc on a : $Q(n, a) \leq d(n)$. On cherche maintenant à majorer $d(n)$, ce que l'on va faire en appliquant la méthode de Rankin. Compte tenu de la forme des équivalents des grandeurs considérées, on choisit $x = e^{-s}$, et $s = c/\sqrt{n}$, c étant un nombre réel positif que l'on précisera. En majorant brutalement, il vient

$$d(n)e^{-ns} \leq \left(\prod_{1 \leq i \leq a/2} (1 + e^{-is} + e^{-(a-i)s}) \right) \left(\prod_{i \geq a+1} (1 + e^{-is}) \right),$$

et

$$(59) \quad \begin{aligned} \log Q(n, a) &\leq \log d(n) \\ &\leq ns + \sum_{1 \leq i \leq a/2} \log(1 + e^{-is} + e^{-(a-i)s}) + \sum_{i \geq a+1} \log(1 + e^{-is}). \end{aligned}$$

Maintenant, la fonction $u \rightarrow \log(1 + e^{-su})$ est décroissante pour s positif fixé, et donc

$$\sum_{i \geq a+1} \log(1 + e^{-is}) \leq \int_a^\infty \log(1 + e^{-su}) du.$$

De même, la fonction $u \rightarrow \log(1 + e^{-su} + e^{-(a-u)s})$ est décroissante pour $u \leq a/2$, et on a ainsi :

$$\sum_{1 \leq i \leq a/2} \log(1 + e^{-is} + e^{-(a-i)s}) \leq \int_0^{a/2} \log(1 + e^{-su} + e^{-s(a-u)}) du.$$

En opérant le changement de variables $u = t\sqrt{n}$ dans les deux intégrales précédentes, et en posant $s = c/\sqrt{n}$ et $a = \lambda\sqrt{n}$, l'inégalité (59) devient

$$(60) \quad \log Q(n, a) \leq \Phi(c, \lambda)\sqrt{n}$$

avec

$$(61) \quad \Phi(c, \lambda) = c + \int_0^{\lambda/2} \log(1 + e^{-ct} + e^{-c\lambda+ct}) dt + \int_\lambda^\infty \log(1 + e^{-ct}) dt.$$

Or on calcule

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \log(1 + e^{-t}) dt &= \int_0^1 \frac{\log(1+u)}{u} du = \int_0^1 \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{u^k}{k+1} du \\ &= \sum_{k=1}^\infty (-1)^{k-1} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{2} \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{12}, \end{aligned}$$

l'interversion des sommes étant justifiée par convergence absolue. On a alors

$$(62) \quad \Phi(c, \lambda) = c + \int_0^{\lambda/2} \log(1 + e^{-ct} + e^{-c\lambda+ct}) dt + \frac{\pi^2}{12c} - \int_0^\lambda \log(1 + e^{-ct}) dt.$$

Pour λ fixé, la majoration (60) est valable pour tout $c > 0$. Or la fonction $\Phi(c, \lambda)$ donnée par (62) est continue sur \mathbb{R}_+^* par rapport à c et tend vers $+\infty$ lorsque $c \rightarrow 0^+$ et $c \rightarrow +\infty$. Elle a donc un minimum en au moins une valeur de c . On pose

$$g(\lambda) = \min_{c>0} \Phi(c, \lambda).$$

Pour majorer cette fonction, on majore la dérivée partielle $\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda}$ et on découpe l'intervalle [1.07, 2.14] en sous-intervalles sur lesquels on applique l'inégalité des accroissements finis. Il vient

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda}(c, \lambda) = \frac{1}{2} \log(1 + 2e^{-c\lambda/2}) - \log(1 + e^{-c\lambda}) - c \int_0^{\lambda/2} \frac{dt}{1 + e^{c\lambda-ct} + e^{c\lambda-2ct}}.$$

La fonction sous l'intégrale étant minimale pour $t = 0$, on en déduit

$$(63) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda}(c, \lambda) \leq y_1 \left(\exp\left(-\frac{c\lambda}{2}\right) \right)$$

où y_1 est définie dans le Lemme 5.2. Par application de ce lemme, on a :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda}(c, \lambda) < 0 \text{ pour } \lambda c < 0.94,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda}(c, \lambda) < 0.1 \text{ pour } \lambda c < 2.4.$$

On découpe alors l'intervalle [1.07, 2.14] en sous-intervalles $[\lambda_i, \lambda_{i+1}]$ avec $\lambda_i \in \{1.07, 1.08, 1.09, 1.1, 1.12, 1.14, 1.16, 1.19, 1.22, 1.25, 1.29, 1.34, 1.39, 1.45, 1.51, 1.57, 1.63, 1.69, 1.75, 1.8, 1.85, 1.9, 1.94, 1.97, 2, 2.03, 2.06, 3.08, 2.1, 2.11, 2.12, 2.13, 2.14\}$.

Lorsque $\lambda_i < 1.63$ on choisit $c = 0.888$, lorsque $1.63 \leq \lambda_i \leq 2$ on prend $c = 0.87$ et lorsque $2 < \lambda_i$ on prend $c = 0.84$ et on vérifie que

$$\Phi(c_i, \lambda_i) + (\lambda_{i+1} - \lambda_i) \max_{\lambda_i \leq \lambda \leq \lambda_{i+1}} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} < 1.732$$

à l'aide de la majoration (63) de $\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda}$, ce qui démontre la première partie du lemme.

Démonstration de (ii) :

Elle est similaire à celle de (i), aussi elle sera un peu moins détaillée que la précédente.

On définit $d_2(n)$ par :

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_2(n)x^n = \left(\prod_{1 \leq i \leq a/2} (1 + x^i + x^{2i} + x^{a-i} + x^{2(a-i)}) \right) \left(\prod_{i \geq a+1} (1 + x^i + x^{2i}) \right).$$

On a alors $Q(n, a, 2) \leq d_2(n)$ et cela entraîne

$$\log Q(n, a, 2) \leq \Phi_2(c, \lambda) \sqrt{n}$$

avec

$$(64) \quad \Phi_2(c, \lambda) = c + \int_0^{\lambda/2} \log(1 + e^{-ct} + e^{-2ct} + e^{-c\lambda+ct} + e^{-2c\lambda+2ct}) dt \\ + \frac{\pi^2}{9c} - \int_0^{\lambda} \log(1 + e^{-ct} + e^{-2ct}) dt,$$

en remarquant que

$$\int_0^{\infty} \log(1 + e^{-t} + e^{-2t}) dt = \int_0^{\infty} [\log(1 - e^{-3t}) - \log(1 - e^{-t})] dt = \frac{\pi^2}{9}.$$

Il vient ensuite

$$(65) \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial \lambda}(c, \lambda) = \frac{1}{2} \log(1 + 2e^{-c\lambda/2} + 2e^{-c\lambda}) - \log(1 + e^{-c\lambda} + e^{-2c\lambda}) \\ - c \int_0^{\lambda/2} \frac{(2 + e^{(c-\lambda)t}) dt}{1 + e^{c\lambda-ct} + e^{2(\lambda-2t)c} + e^{(2\lambda-3t)c} + e^{2(\lambda-t)c}}.$$

Pour minorer l'intégrale, on fait $t = \lambda/2$ au numérateur et $t = 0$ au dénominateur, ce qui donne :

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial \lambda}(c, \lambda) \leq y_2 \left(\exp\left(-\frac{c\lambda}{2}\right) \right).$$

L'application du Lemme 5.2 donne alors

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial \lambda}(c, \lambda) < 0 \text{ pour } \lambda c < 0.76,$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial \lambda}(c, \lambda) < 0.18 \text{ pour tout } \lambda, c.$$

On applique alors de même l'inégalité des accroissements finis et on obtient la majoration annoncée dans le lemme. Pour cela on prend

$$\lambda_i \in \{0.81, 0.812, 0.815, 0.819, 0.824, 0.83, 0.838, 0.848, 0.86, 0.875, 0.89, 0.91, 0.93, 0.95, 0.98, 1.01, 1.04, 1.07, 1.11, 1.15, 1.19, 1.23, 1.27, 1.3, 1.33, 1.36, 1.38, 1.4, 1.432, 1.45, 1.47, 1.49, 1.5, 1.51, 1.52, 1.53, 1.54, 1.55, 1.56, 1.57, 1.575, 1.582, 1.59, 1.596, 1.601, 1.606, 1.61, 1.614, 1.617, 1.62\}$$

avec $c = 1.02$ pour $\lambda < 1.4$, $c = 0.99$ pour $1.4 \leq \lambda \leq 1.53$ et $c = 0.95$ pour $1.53 < \lambda$.

Lemme 5.4 :

Lorsque $n \rightarrow \infty$ on a :

1. pour $1.07\sqrt{n} \leq a \leq n - 1.07\sqrt{n}$:

$$(66) \quad Q(n, a) \leq \exp((1 + o(1))1.732\sqrt{n}),$$

2. pour $0.81\sqrt{n} \leq a \leq n - 0.81\sqrt{n}$:

$$(67) \quad Q(n, a, 2) \leq \exp((1 + o(1))1.969\sqrt{n}).$$

On va utiliser les Lemmes 5.1 et 5.3.

- Preuve de 1. On prend $\epsilon = 1.07$. Le lemme 5.1 nous donne que pour $j/2\epsilon\sqrt{n} \leq a \leq (j+1)/2\epsilon\sqrt{n}$, et $2 \leq j \leq 2 \log n$, on a alors

$$Q(n, a) \leq (2p(\epsilon\sqrt{n}))^{j-1} \exp(1.732\sqrt{n}).$$

On prend alors $j = 2 \log n$ et on applique les Théorèmes 7 et 8 pour majorer $Q(n, a)$ lorsque $\epsilon \log n \sqrt{n} \leq a \leq n/2$. En effet, si $\epsilon\sqrt{n} \log n \leq a \leq n/2$, alors $Q(n, a) = q(n/2)^{1+o(1)}$. On n'a plus alors qu'à utiliser l'équivalent (6) de $q(n)$ pour conclure, en vérifiant que $\frac{\pi}{\sqrt{2}\sqrt{3}} = 1.28... < 1.732$, d'où le résultat.

- Preuve de 2. On prend dans ce cas $\epsilon = 0.81$. Le lemme 5.1 nous donne alors que pour $j/2\epsilon\sqrt{n} \leq a \leq (j+1)/2\epsilon\sqrt{n}$, et $2 \leq j \leq 2\lfloor \sqrt{n}/2 \rfloor$, on a

$$Q(n, a, 2) \leq (2p(\epsilon\sqrt{n}))^{j-1} \exp(1.969\sqrt{n}).$$

On prend de même $j = 2 \log n$ et on applique les Théorèmes 7 et 8 pour majorer $Q(n, a, 2)$ lorsque $\epsilon \log n \sqrt{n} \leq a \leq n/2$, en observant que $Q(n, a, 2) \leq R(n, a)$. Il suffit de vérifier dans ce cas que $\pi/\sqrt{3} = 1.81... < 1.969$.

5.4 Fin de la preuve

Par le Lemme 5.4, le nombre de partitions qui ne représentent pas tous les a de l'intervalle $1.07\sqrt{n} \leq a \leq n - 1.07\sqrt{n}$ est inférieur à $n \exp((1 + o(1))1.732\sqrt{n})$. Si l'on enlève ces partitions, pour une partition restante Π , $\mathcal{E}(\Pi)$ contient tous les nombres compris entre $1.07\sqrt{n}$ et $n - 1.07\sqrt{n}$. De tels ensembles, il y en a au plus $2^{1.07\sqrt{n}}$, compte tenu de la symétrie. On a donc

$$\hat{q}(n) \leq 2^{1.07\sqrt{n}} + n \exp((1 + o(1))1.732\sqrt{n}).$$

Mais comme $1.07 \log 2 < 1.732$, en utilisant l'équivalent (6) de $q(n)$, on obtient, vu que $\frac{1.732}{\pi/\sqrt{3}} < 0.955$:

$$\hat{q}(n) \leq q(n)^{0.955}.$$

Pour $\hat{p}(n)$, on procède de même et on utilise

$$\hat{p}(n) = \hat{q}(n, 2),$$

relation que l'on a déjà vue : c'est une application directe du Lemme 2.1. On a ainsi :

$$\hat{p}(n) \leq 2^{0.81\sqrt{n}} + n \exp((1 + o(1))1.969\sqrt{n}).$$

En utilisant l'équivalent (4) de $p(n)$, comme $\frac{1.969}{\pi\sqrt{2/3}} < 0.768$, on obtient :

$$\hat{p}(n) \leq p(n)^{0.768}.$$

Appendice

Nous allons ici compléter la preuve du Théorème 2 en montrant que l'on a bien, en posant $\lambda = \exp(-\mu z)$

$$(68) \quad Q(z, \mu) = F(\lambda) = (2I(\lambda) - L(\lambda)) \left(\frac{-\log \lambda}{I(\lambda) - L(\lambda)} \right)^{1/2}$$

où

$$(69) \quad I(\lambda) = \int_1^2 \log(1 + \lambda^y) dy$$

et

$$(70) \quad L(\lambda) = \log \left(\frac{(1 + \lambda^2)^2}{1 + \lambda} \right).$$

On a

$$(71) \quad Q(z, \mu) = \frac{1}{\mu} \int_{z\mu}^{2z\mu} \left(\log(1 + e^u) - \frac{ue^u}{1 + e^u} \right) du$$

avec

$$(72) \quad \int_z^{2z} \frac{x}{1 + e^{\mu x}} dx = 1.$$

On mène alors le calcul ainsi :

$$\begin{aligned} Q(z, \mu) &= \frac{1}{\mu} \int_{z\mu}^{2z\mu} \left(\log(1 + e^u) - \frac{ue^u}{1 + e^u} \right) du \\ &= \int_z^{2z} \left(\log(1 + e^{\mu x}) - \frac{\mu x e^{\mu x}}{1 + e^{\mu x}} \right) dx \\ &= \int_z^{2z} \log(1 + e^{\mu x}) dx - \left[x \log(1 + e^{\mu x}) \right]_z^{2z} + \int_z^{2z} \log(1 + e^{\mu x}) dx \\ &= 2 \int_z^{2z} \log(1 + e^{\mu x}) dx - z \log \frac{(1 + \lambda^{-2})^2}{1 + \lambda^{-1}} \\ &= z \left(2 \int_1^2 \log(1 + \lambda^{-y}) dy - \log \frac{(1 + \lambda^{-2})^2}{1 + \lambda^{-1}} \right) \\ &= z \left(2 \int_1^2 \log(1 + \lambda^y) dy - \log \frac{(1 + \lambda^2)^2}{1 + \lambda} \right) = z(2I(\lambda) - L(\lambda)). \end{aligned}$$

Or, en posant $x = zy$ dans (72), il vient

$$z^{-2} = \int_1^2 \frac{ydy}{1 + \lambda^{-y}} = \left[\frac{y}{\log \lambda} \log(1 + \lambda^y) \right]_1^2 - \frac{1}{\log \lambda} \int_1^2 \log(1 + \lambda^y) dy$$

soit

$$(73) \quad z^{-2} = \frac{-1}{\log \lambda} (I(\lambda) - L(\lambda)),$$

d'où (68).

Il nous reste alors à montrer que la fonction

$$F(\lambda) = (2I(\lambda) - L(\lambda)) \left(\frac{-\log \lambda}{I(\lambda) - L(\lambda)} \right)^{1/2}$$

admet un unique maximum sur $]0, +\infty[$ en λ_0 tel que $L(\lambda_0) = 0$, i. e. en λ_0 racine de $X^3 + 2X - 1$.

En prenant la dérivée logarithmique, on obtient

$$\frac{F'}{F}(\lambda) = \frac{2I'(\lambda) - L'(\lambda)}{2I(\lambda) - L(\lambda)} + \frac{1}{2\lambda \log \lambda} - \frac{I'(\lambda) - L'(\lambda)}{2(I(\lambda) - L(\lambda))}.$$

Si $N(\lambda)$ et $D(\lambda)$ désignent respectivement le numérateur et le dénominateur de cette expression, on trouve :

$$D(\lambda) = 2(2I(\lambda) - L(\lambda))\lambda \log \lambda (I(\lambda) - L(\lambda)),$$

$$N(\lambda) = ((2I'(\lambda) - L'(\lambda))2\lambda \log \lambda + (2I(\lambda) - L(\lambda)))(I(\lambda) - L(\lambda)) - (I'(\lambda) - L'(\lambda))\lambda \log \lambda (2I(\lambda) - L(\lambda)).$$

Or une intégration par parties montre que

$$(74) \quad I'(\lambda) = \frac{L(\lambda) - I(\lambda)}{\lambda \log \lambda}.$$

En remplaçant dans l'expression de $N(\lambda)$, on obtient :

$$N(\lambda) = L(\lambda)(2(I(\lambda) - L(\lambda)) + \lambda \log \lambda L'(\lambda)).$$

Finalement, on a

$$F'(\lambda) = A(\lambda)B(\lambda)L(\lambda),$$

où

$$A(\lambda) = 2(I(\lambda) - L(\lambda)) + \lambda \log \lambda L'(\lambda)$$

et

$$B(\lambda) = \frac{1}{2\lambda \log \lambda (I(\lambda) - L(\lambda))} \left(\frac{-\log \lambda}{I(\lambda) - L(\lambda)} \right)^{1/2},$$

cette dernière grandeur étant toujours strictement négative d'après (73). Il nous reste à étudier le signe de $A(\lambda)$. De (74), on tire que

$$L(\lambda) = \lambda \log \lambda I'(\lambda) + I(\lambda)$$

et en dérivant

$$L'(\lambda) = \lambda \log \lambda I''(\lambda) + (2 + \log \lambda) I'(\lambda).$$

En reportant dans l'expression de $A(\lambda)$, on obtient :

$$A(\lambda) = \lambda \log^2 \lambda (\lambda I''(\lambda) + I'(\lambda)).$$

Mais on a facilement que :

$$\begin{aligned} \lambda I''(\lambda) + I'(\lambda) &= \frac{d}{d\lambda} (\lambda I'(\lambda)) = \frac{d}{d\lambda} \left(\int_1^2 \frac{y}{1 + \lambda^y} dy \right) \\ &= \int_1^2 \frac{y^2 \lambda^{y-1}}{(1 + \lambda^y)^2} dy > 0. \end{aligned}$$

Donc finalement, $F'(\lambda)$ est du signe de $-L(\lambda)$, ce qu'on se proposait de démontrer.

Bibliographie

- [1] M. DELÉGLISE, P. ERDÖS et J. L. NICOLAS, Sur les ensembles représentés par les partitions d'un entier n . À paraître.
- [2] J. DIXMIER, Partitions avec sous-sommes interdites. *Bull. Soc. Math. Belgique*, 42, 1990, 477-500.
- [3] J. DIXMIER et J. L. NICOLAS, Partitions without small parts. *Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai* 51, Number Theory, Budapest, Hungary, 1987, 9-33.
- [4] F. DYSON, A theorem on the densities of sets of integers. *J. London Math. Soc.*, 20, 1945, 8-14.
- [5] P. ERDÖS, J. L. NICOLAS et A. SÁRKÖZY. On the number of partitions of n without a given subsum I. *Discrete Math.*, 75, 1989, 155-166.
- [6] P. ERDÖS, J. L. NICOLAS et A. SÁRKÖZY, On the number of partitions of n without a given subsum II. *Analytic Number Theory*, edited by B. Berndt, H. Diamond, H. Halberstam, A. Hildebrand, Birkhäuser 1990, 207-236.
- [7] G. H. HARDY et S. RAMANUJAN, Asymptotic formulae in combinatory analysis. *Proc. London Math. Soc.*, 2,17, 1918, 75-115.
- [8] A. E. INGHAM, A tauberian theorem for partition. *Annals of Mathematics*, 42, 1941, 1075-1090.

- [9] H. B. MANN, A proof of the fundamental theorem on the density of sums of sets of positive integers. *Annals of Mathematics*, 43, 1942, 523-527.
- [10] J. L. NICOLAS et A. SÁRKÖZY, On two partition problems. *Acta Math. Hungar.*, 77, 1997, 95-121.
- [11] A. SÁRKÖZY, Finite addition theorems, I. *Journal of Number Theory*, 32, 1989, 114-130.
- [12] A. SÁRKÖZY, Finite addition theorems, I. *Journal of Number Theory*, 48, 1994, 197-218.
- [13] G. TENENBAUM, Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres. *Revue de l'institut Élie Cartan*, 13, 1990.
- [14] E. M. WRIGHT, Asymptotic partition formulae. *Acta Math.*, 63, 1934, 143-191.