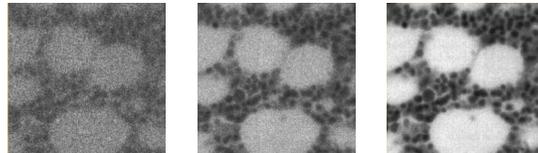


CES PAGES SONT DESTINÉES À FACILITER LA PRISE DE NOTES. ELLES SONT PRODUITES AUTOMATIQUEMENT À PARTIR DU SOURCE L^AT_EX/BEAMER DU DIAPORAMA SERVANT DE SUPPORT DE COURS. LA PRÉSENTATION ET LA MISE EN PAGE SONT PAR CONSÉQUENT APPROXIMATIVES.

Partie C — thème 8

Débruitage (2) : bruit aléatoire



- famille des méthodes de restauration d'image
- causes : acquisition, reconstruction, transmission, compression, etc.
- caractérisation : périodique ou *aléatoire*
- filtrage spatial : filtres moyenneurs, filtres d'ordre

1 Bruit aléatoire en imagerie optique

1.1 Altération aléatoire des pixels de l'image

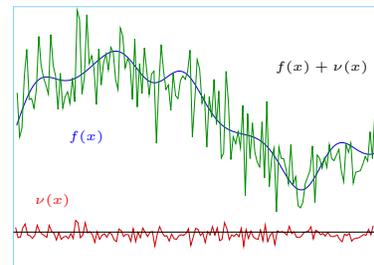
Modèles de bruits

- $\nu(x, y)$: fonction bruit définissant la dégradation en chaque pixel

- bruit **additif** : le plus courant en imagerie optique

$$I'(x, y) = I(x, y) + \nu(x, y)$$

- filtre moyenneur : suppression des hautes fréquences
→ réduction du bruit mais également des hautes fréquences de I : **compromis**
- la capacité à reconstruire le signal dépend du **rapport signal sur bruit** (SNR : *signal-to-noise ratio*)



$$SNR = \frac{\bar{f}^2}{\nu^2} \text{ ou en dB}$$

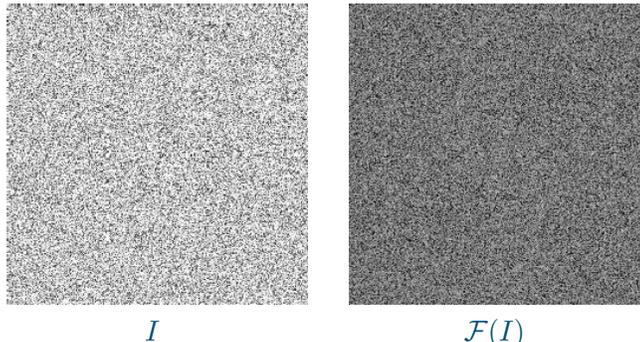
$$SNR_{DB} = 10 \log_{10} \left(\frac{\bar{f}^2}{\nu^2} \right)$$

- bruit **multiplicatif** : grain (par exemple radar)

$$I'(x, y) = I(x, y) \times \nu(x, y)$$

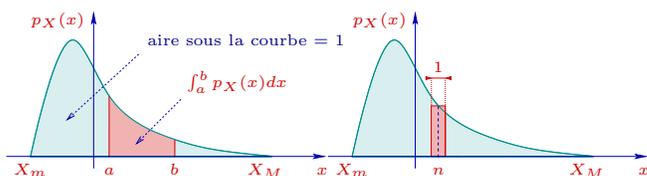
Caractérisation fréquentielle du bruit additif en imagerie optique

- généralement : bruit blanc (« neige »)
- le spectre du bruit contient toutes les fréquences avec la même énergie (analogie avec lumière blanche)



Caractérisation statistique du bruit par une densité de probabilité

- modélisation statistique : description ν (fonction bruit) par sa densité de probabilité
- bruit : écarts de niveaux de gris par rapport au signal image ($I(P) + \nu(P)$)
- l'amplitude des écarts est caractérisée par une densité de probabilité
- rappel sur les lois de probabilité continues
- variable aléatoire continue X sur $[X_m, X_M]$ caractérisée par sa fonction de densité de probabilité $p_X(x)$



$$p\{X \in [a, b]\} = \int_a^b p_X(x) dx$$

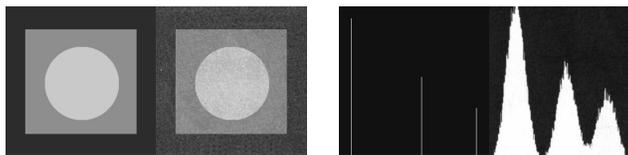
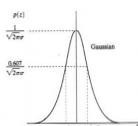
$$\left[\text{probabilité que le bruit en un point } P \text{ soit égal à } n \right] = p(\nu(P)=n) = \int_{n-0.5}^{n+0.5} p(x) dx \sim p(n)$$

Bruit gaussien

- bruit le plus courant en imagerie optique : circuits électroniques, des capteurs en faible luminosité, etc.
- la densité de probabilité de ν est une gaussienne :

$$p_\nu(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

- la probabilité du bruit décroît exponentiellement autour de μ



$$\mu = 0$$

$$\sigma = 16$$

Simulation d'un bruit gaussien

- **théorème central limite** : une somme de processus aléatoires indépendants tend vers une distribution gaussienne
- application : approximation de X_g de densité de probabilité G_σ ($\mu = 0$) par une **somme de tirages aléatoires uniformes** sur $[0, 1]$:

$$X_g = \sigma \sqrt{\frac{12}{n}} \left[\left(\sum_1^n \frac{\text{rand}()}{\text{RAND_MAX}} \right) - \frac{n}{2} \right]$$

on peut prendre $n = 12$

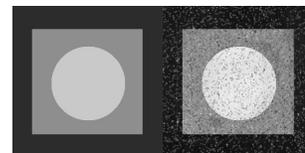
$$X_g = \sigma \times \left[\left(\sum_1^{12} \frac{\text{rand}()}{\text{RAND_MAX}} \right) - 6 \right]$$

- mise en œuvre du bruitage gaussien d'une image I : pour chaque point (i, j)
 1. tirage de la variable aléatoire X_g
 2. $I(i, j) = I(i, j) + X_g$

1.2 Bruit impulsif

Principe

- seuls certains pixels de l'image sont altérés
- capteurs défectueux, erreurs de transmission, poussières, taches



Bruit impulsif statique

- pour chaque pixel p , trois possibilités :
 - $p \leftarrow a$ (valeur sombre) avec une probabilité p_a
 - $p \leftarrow b$ (valeur claire) avec une probabilité p_b
 - p reste inchangé avec une probabilité $1 - p_a - p_b$
- cas particulier (poivre et sel) : $a = 0$ et $b = I_{max}$

Bruit impulsif aléatoire

- ν une fonction bruit uniforme sur $[0..i_{max}]$
- pour chaque pixel p , deux possibilités :
 - $p \leftarrow \nu$ avec une probabilité p_ν
 - p reste inchangé avec une probabilité $1 - p_\nu$

1.3 Méthodes de traitement du bruit aléatoire

- bruit : **hautes fréquences**
 - **bruit additif**
 - bruit décorrélé, le plus souvent gaussien
 - filtres moyenneurs
 - **bruit impulsif**
 - remplacement de valeurs aberrantes
 - filtres d'ordre
- **compromis** entre
 - suppression du bruit et préservation des HF (détails, contours, textures)
 - adaptation locale : préservation des hautes fréquence pertinentes

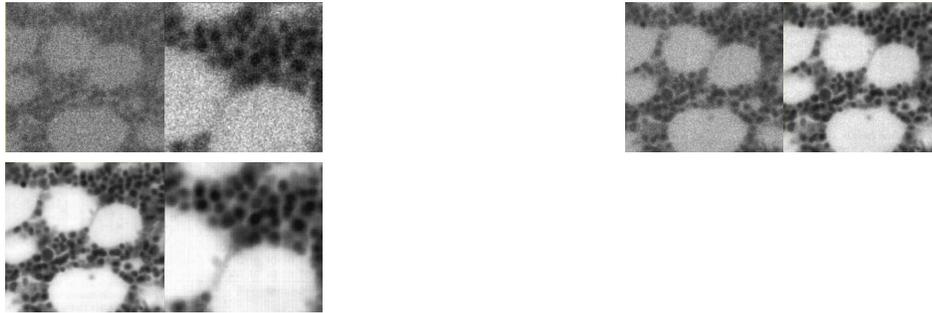
2 Traitement du bruit additif gaussien

2.1 Moyenne d'une suite d'images

— hypothèse : on peut acquérir un ensemble d'images $g_i = f + \nu_i$

on construit
$$\bar{g}(x, y) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M g_i(x, y)$$

— si $\nu(x, y)$ est **décorrélé** et de **moyenne nulle**, alors $E\{\bar{g}(x, y)\} = f(x, y)$



Microscopie à fluorescence de la moelle osseuse - J.C.Russ, *Img. Process. Handbook* 4^{ed}

$$M = 4M = 16M = 256$$

2.2 Filtres moyenneurs

Principe : moyenne des valeurs sur un voisinage $V(p)$ de taille N

— moyenne **arithmétique** (convolution par un filtre boîte)

$$I'(p) = \frac{1}{N} \sum_{p \in V(p)} I(p)$$

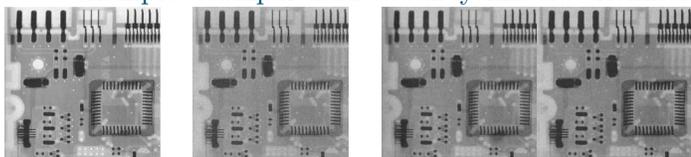
— filtre de base, lissage important

— moyenne **géométrique**

$$I'(p) = \left(\prod_{p \in V(p)} I(p) \right)^{\frac{1}{N}}$$

— comparable au filtre arithmétique, préserve mieux les détails

— exemple : comparaison des moyenneurs arithmétiques et géométriques



I $I + \nu$ arithmétique géométrique

Image rayon X d'une carte électronique - Gonzalez & Wood, *DIP* 4^{ed} © J.E.Pascente, Lixi Inc.

2.3 Filtres moyenneurs adaptatifs

— discrimination **bruit / détails**

— détermination statistique d'un **seuil** en deça duquel un écart est un bruit

Filtre moyenneur seuillé

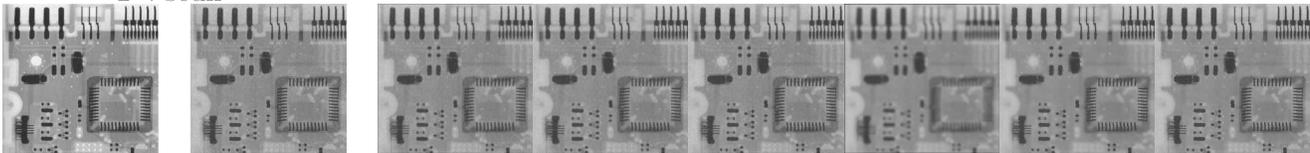
- critère : écart à la moyenne locale

$$I'(p) = \begin{cases} \mu_V(p) & \text{si } |I(p) - \mu_V(p)| < T \\ I(p) & \text{sinon} \end{cases}$$

- $\mu_V(p)$: moyenne sur un voisinage V du point p
- seuil T (écart de niveau de gris) : peut être ajusté par rapport à l'écart type du bruit si on peut l'estimer (par exemple en calculant l'écart type sur une région suffisamment homogène)

- exemple : mise en œuvre de filtre moyenneur seuillé

- w : largeur du voisinage
- T : seuil



I

$I + \nu$

$$w = 3 \quad w = 3 \quad w = 3 \quad w = 7 \quad w = 7 \quad w = 7$$

$$T = 16T = 8 \quad T = 16T = 8$$

Image rayon X d'une carte électronique – Gonzalez & Wood, DIP 4^{ed} © J.E.Pascente, Lixi Inc.

Filtre statistique adaptatif

- calcul d'un coefficient local de lissage

$$I'(p) = I(p) - K_p \times (I(p) - \mu_V(p))$$

$$K_p \in [0, 1] : \begin{cases} K_p = 0 & \rightarrow I'(p) = I(p) \quad (\text{pas de lissage}) \\ K_p = 1 & \rightarrow I'(p) = \mu_V(p) \quad (\text{lissage maximal}) \end{cases}$$

- définition de K_p par **estimation statistique** du bruit au point p : $\frac{\sigma_\nu}{\sigma_V(p)}$

$$K_p = \min\left(\frac{\sigma_\nu}{\sigma_V(p)}, 1\right) \rightarrow \begin{cases} \text{hypothèse raisonnable :} & \sigma_V(p) \geq \sigma_\nu & K_p \in [0, 1] \\ \text{bruit maximal :} & \sigma_V(p) \simeq \sigma_\nu & K_p \rightarrow 1 \\ \text{arêtes, texture, etc. :} & \sigma_V(p) \gg \sigma_\nu & K_p \rightarrow 0 \end{cases}$$

- estimation de σ_ν possible sur une **zone uniforme** ou par **essais successifs**

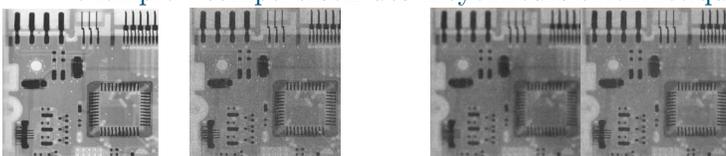
- *comptage du nombre de valeurs incorrectes* : $\sigma_V(p) < \sigma_\nu$

- *trop important* : σ_ν trop grand \Rightarrow *filtrage excessif*

- σ_ν trop faible \Rightarrow *filtrage insuffisant*

- possibilité de fixer σ_ν relativement à un **pourcentage** d'erreurs acceptées

- exemple : comparaison des moyenneurs arithmétiques et statistique adaptatif



I

$I + \nu$

arithmétique statistique adaptatif

Image rayon X d'une carte électronique – Gonzalez & Wood, DIP 4^{ed} © J.E.Pascente, Lixi Inc.

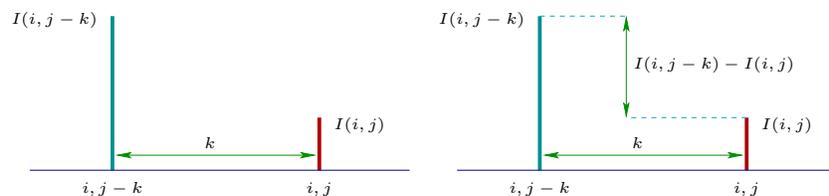
2.4 Filtre bilatéral

- **lissage gaussien adaptatif** de la ligne i :

— moyenne des voisins sur $[(i, j - L)..(i, j + L)]$ avec une **double** pondération

— α_1 et α_2 définis au moyen de gaussiennes sur $[0, 1]$: $G_\sigma(x) = e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$

$$I'(i, j) = K_{i,j} \sum_{k=-L}^{+L} \alpha_1(k) \alpha_2(i, j, k) I(i, j - k)$$



— α_1 décroît en fonction de la distance :

$$\alpha_1(k) = G_{\sigma_1}(k)$$

— α_2 décroît en fonction de la différence d'amplitude :

$$\alpha_2(i, j, k) = G_{\sigma_2}(|I(i, j - k) - I(i, j)|)$$

— normalisation des coefficients : $K_{i,j}$ est l'inverse de la somme de tous les produits $\alpha_1\alpha_2$

— le filtre dépend de deux paramètres :

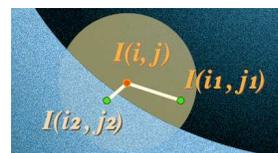
— σ_1 : α_1 , pondération selon la **distance**

— σ_2 : α_2 , pondération selon l'**amplitude** : adaptation locale aux contours

— hypothèse :

— **contour significatif** : variation forte d'amplitude

— **bruit** : faible variation d'amplitude



différence d'amplitude

— faible pour (i_1, j_1) : $\alpha_2 \nearrow$

— élevée pour (i_2, j_2) : $\alpha_2 \searrow$

— paramétrage du filtre bilatéral :

— rôle de σ_1 : réduction du bruit

— rôle de σ_2 : préservation des contours

— $\sigma_2 \rightarrow 0$: augmente l'influence de la pondération selon l'amplitude : préservation des contours

— $\sigma_2 \rightarrow +\infty$: réduit l'influence de la pondération selon l'amplitude et tend vers un filtrage gaussien d'écart type σ_1

— exemples de débruitage avec le filtre bilatéral



$I + \nu$



$\sigma_1 = 6$ et $\sigma_2 = 50$



$\sigma_1 = 6$ et $\sigma_2 = 30$

3 Traitement du bruit impulsif

3.1 Principe des filtres d'ordre

- bruit impulsionnel : impacte **seulement un sous-ensemble** de pixels
 - autour de chaque pixel : combinaison de pixels corrects et bruités
 - principe : identifier et remplacer les **valeurs extrêmes** (potentiellement aberrantes)
 - moyenne pondérée sur un voisinage **trié**
- **moyenne tronquée** :
 - $\{i_1, \dots, i_n\}$: ensemble valeurs des pixels sur un voisinage de p
 - $(i_{(1)}, \dots, i_{(n)})$: suite des valeurs **triées**
 - $\{c_1, \dots, c_n\}$ tels que $\sum_{k=1}^n c_k = 1$

$$I'(p) = \sum_{k=1}^n c_k i_{(k)} \quad \text{avec} \quad c_i = \underbrace{\{0, \dots, 0\}}_{\frac{n-p}{2}} \underbrace{\{1/p, \dots, 1/p\}}_p \underbrace{\{0, \dots, 0\}}_{\frac{n-p}{2}}$$

- en pratique :
 - filtre **médian** ($p = 1$) : on ne conserve que la valeur médiane $i_{(\frac{n+1}{2})}$
 - filtre **olympique** ($p = n - 2$) : on supprime seulement les valeurs extrêmes $i_{(1)}$ et $i_{(n)}$
 - le médian et ses variantes demeure le plus utilisé

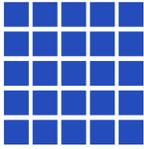
Exemples en dimension 1 : médian de taille 5

- sans bruit impulsionnel

1	2	3	7	8															
1	2	3	7	8	9	9	10	1	2	3	7	8	9	9	10				
1	2	3						1	2	3	7								
		3	7	8	9	9				7	8	9	9	10					
1	2	3	7	8	9	9	10	1	2	3	7	8	9	9	10				
1	2	3	7	8				1	2	3	7	8	9	9	10				

- avec bruit impulsionnel

1	2	3	8	50															
1	2	3	50	8	9	9	10	1	2	3	50	8	9	9	10				
1	2	3						1	2	3	8								
		3	8	9	9	50				8	9	9	10	50					
1	2	3	50	8	9	9	10	1	2	3	50	8	9	9	10				
1	2	3	8	9				1	2	3	8	9	9	9	10				



domaine carré domaine hexagonal



carré hexagonal
largeur 3 largeur 7

— possibilité de traitement directionnel

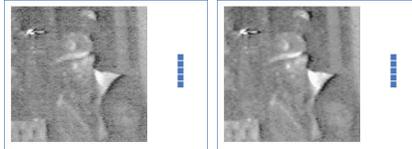


Image de vidéosurveillance – J.C.Russ, *Img. Process. Handbook* 4^{ed}

- même problématique que pour les filtres moyennés : compromis bruit / détail
- plusieurs stratégies pour discriminer les hautes fréquences pertinentes

3.2 Filtre médian pondéré

- objectif : réduire les modifications injustifiées
- exemple en 1D avec un voisinage de taille 5 :

$$\{ 10 \ 90 \ 15 \ 7 \ 5 \} \rightarrow \{ 5 \ 7 \ 10 \ 15 \ 90 \} \rightarrow 10$$

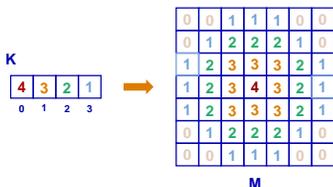
- stratégie : pondération par réplication des valeurs sur le voisinage
- réplication des valeurs en fonction de coefficients $k_1 \dots k_n$:

$$k \diamond x : x \rightarrow \overbrace{\{x, \dots, x\}}^k$$

- exemple de coefficients sur un voisinage de taille 5 : $\{1, 2, 3, 2, 1\}$

$$\begin{aligned} \{ 1 \diamond 10 \ 2 \diamond 90 \ 3 \diamond 15 \ 2 \diamond 7 \ 1 \diamond 5 \} &\rightarrow \{ 10 \ 90 \ 90 \ 15 \ 15 \ 15 \ 7 \ 7 \ 5 \} \\ &\rightarrow \{ 5 \ 7 \ 7 \ 10 \ 15 \ 15 \ 15 \ 90 \ 90 \} \\ &\rightarrow 15 \end{aligned}$$

- en dimension 2, on peut construire un tableau M de coefficients en fonction de la distance au centre du filtre
- exemple pour une largeur de filtre $L = 3$:



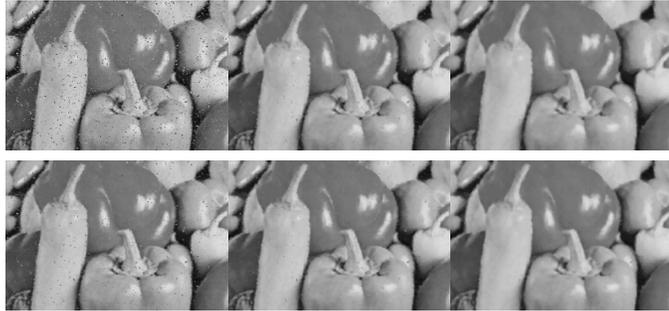
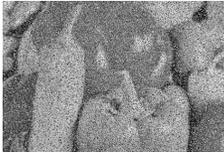
pour $i \in [-3..3]$, pour $j \in [-3..3]$
 $M[i, j] = K[\sqrt{i^2 + j^2}]$

— filtrage de $I[i, j]$:

pour $d_i \in [-L..L]$, pour $d_j \in [-L..L]$
 construction de la liste $\{M[d_i, d_j] \diamond I[i + d_i, j + d_j]\}$

— remarque : si tous les coefficients du vecteur K valent 1, on retrouve le médian standard avec domaine hexagonal

— *exemples de filtrages médian pondérés :*



*médian médian
largeur 3 largeur 7*

*médian médian
pondéré pondéré
largeur 5 largeur 9*

3.3 Filtre multimédian

— combinaison de plusieurs filtrage : réduit le lissage

— première étape

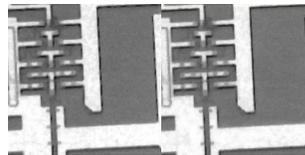
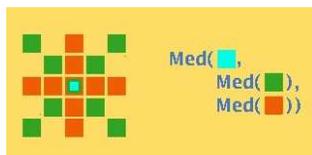
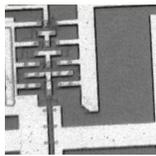
– application de deux ou quatre filtres médians sur des voisinages **directionnels**



— seconde étape

– médian des valeurs calculées à l'étape 1 (deux ou quatre) et de la valeur du pixel à traiter

— exemple de filtrage médian médian (multimédian) :



médian largeur 3 médian median largeur 5

3.4 Filtre médian adaptatif

— hypothèse :

- sur le voisinage de chaque pixel, le bruit
 - correspond soit à la valeur *minimale* soit à la valeur *maximale*
 - est distant de la médiane
- stratégie :
 - critère
 - un pixel p est filtré seulement si son intensité est *minimale* ou *maximale*
 - relativement à un voisinage adaptatif $V(p)$
 - choix du voisinage
 - $V(p)$ est le plus petit voisinage t.q. la *médiane diffère* des valeurs minimale et maximale
 - $V(p)$ est de *taille bornée*
- si $V(p)$ est un voisinage de p , on note
 - $med_V(p)$ la valeur médiane
 - $min_V(p)$ la valeur minimale
 - $max_V(p)$ la valeur maximale

```

initialiser  $V(p)$  avec  $p$  et ses huit voisins
tant que  $med_V(p) = min_V(p)$  ou  $med_V(p) = max_V(p)$ 
{
  accroître de 1 la taille de  $V$ 
  si la taille de  $V$  est maximale
    retourner  $I(p)$ 
}

si  $I(p) \neq min_V(p)$  et  $I(p) \neq max_V(p)$ 
  retourner  $I(p)$ 
sinon
  retourner  $med_V(p)$ 

```

- exemple de filtrage médian adaptatif :

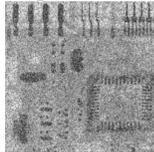
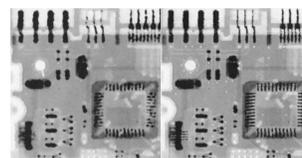


Image rayon X d'une carte électronique – Gonzalez & Wood, DIP 4^{ed} © J.E.Pascente, Lixi Inc.



médian largeur 7 médian adaptatif, taille maximale 7

3.5 Filtrage médian d'images couleurs

Filtrage marginal

- bruit de capteurs : pertinent de corriger chaque canal indépendamment
- mise en œuvre vectorielle possible avec la relation d'ordre entrelacée sur les couleurs

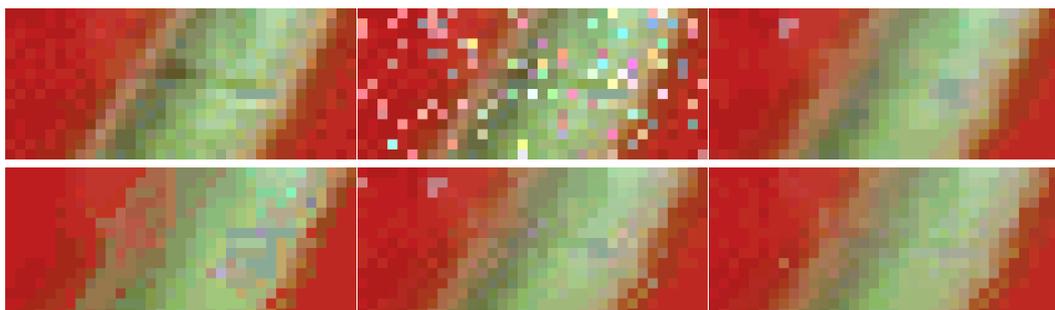


image test image test bruité médian 3×3
 médian 5×5 médian / médian 5×5 médian / médian 9×9

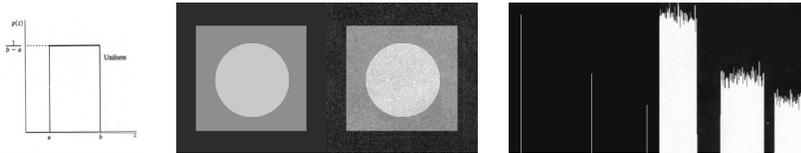
ANNEXE A

Caractérisation statistique des autres bruits usuels

Bruit uniforme

— toutes les valeurs ont la même probabilité d'apparition

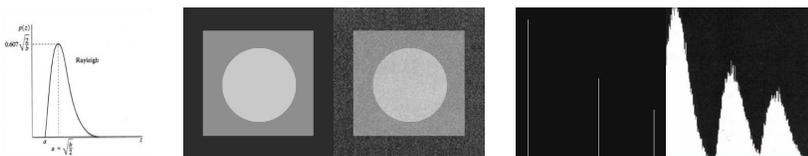
$$p_\nu(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
$$\mu = \frac{a+b}{2}$$
$$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$



Bruit de Rayleigh

— imagerie ultrason

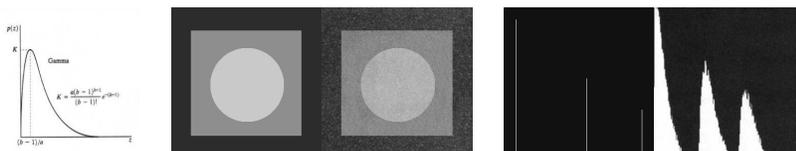
$$p_\nu(x) = \begin{cases} \frac{2}{b}(x-a)e^{-\frac{(x-a)^2}{b}} & \text{si } x \geq a \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$



Bruit d'Erlang ou gamma

— imagerie laser

$$p_\nu(x) = \begin{cases} \frac{a^b x^{b-1}}{(b-1)!} e^{-ax} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

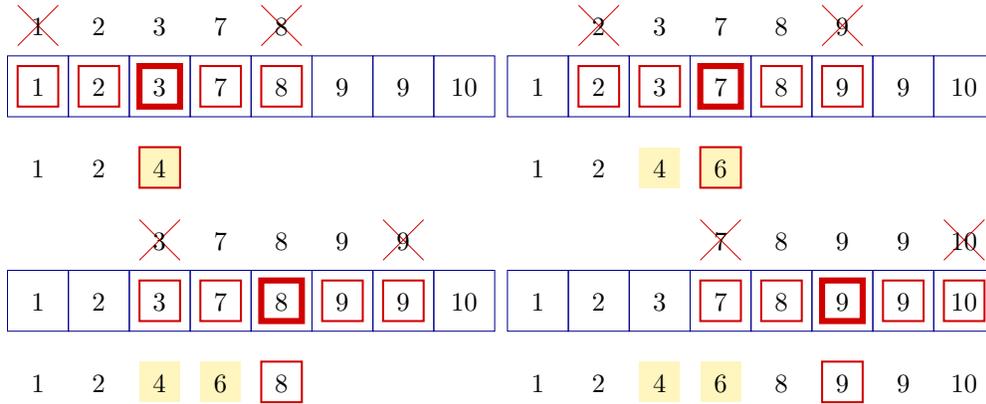


ANNEXE B

Exemple avec filtre olympique

Exemples en dimension 1 avec le filtre olympique

— sans bruit impulsionnel



— avec bruit impulsionnel

