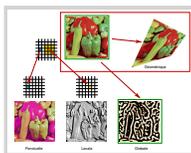


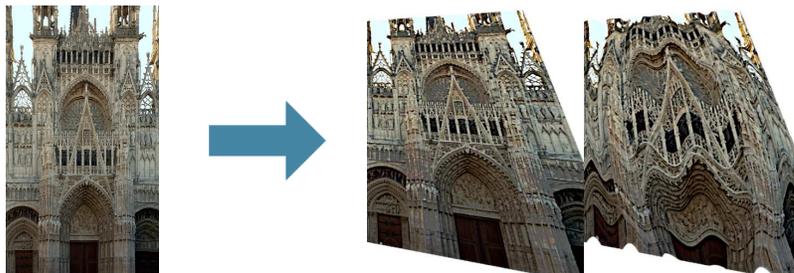
CES PAGES SONT DESTINÉES À FACILITER LA PRISE DE NOTES. ELLES SONT PRODUITES AUTOMATIQUEMENT À PARTIR DU SOURCE L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X/BEAMER DU DIAPORAMA SERVANT DE SUPPORT DE COURS. LA PRÉSENTATION ET LA MISE EN PAGE SONT PAR CONSÉQUENT APPROXIMATIVES.



## Partie B — thème 6

### Transformations géométriques et déformations

- déplacements des points avec conservation de la couleur
- déformation du domaine (la même pour chaque point)
- déformation propre à chaque point



## 1 Principes généraux et mise en œuvre

### 1.1 Principe des transformations continues

$$\boxed{\begin{array}{l} I : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C} \\ p \mapsto I(p) \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{l} I' : \mathcal{D}' \rightarrow \mathcal{C} \\ p' \mapsto I'(p') \end{array}}$$

- mise en correspondance des points de  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  au moyen d'une fonction  $h$  :

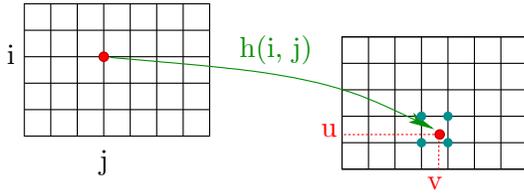
$$\begin{array}{l} h : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}' \\ p \mapsto h(p) = p' \end{array}$$

- conservation de la couleur

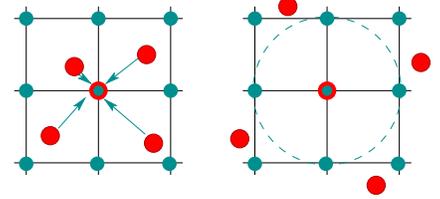
$$I'(h(p)) = I(p)$$

- contrainte sur  $h$  : ne créer ni « déchirure » ni « collision »
  - transformation élastique (analogie du *ballon de baudruche*)
  - dans  $\mathbb{R}^n$  : *homéomorphisme* (transformation continue, bijective et à réciproque continue)
- dans  $\mathbb{Z}^n$  : rééchantillonnage

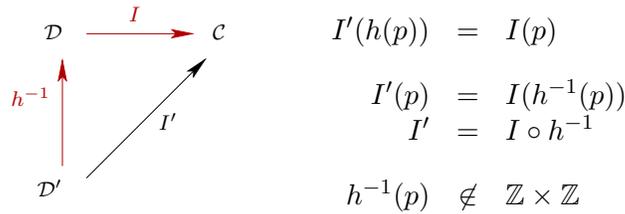
### 1.2 Mise en œuvre discrète par transformation directe



- nécessite une **reconstruction**, *a minima* une interpolation des valeurs des quatre voisins (filtre de Bartlett)
- implique de **cumuler** les contributions de plusieurs points de l'image source
- la gestion des « **trous** » peut nécessiter un filtre arbitrairement grand
- méthode complexe à mettre en œuvre dans le cas général



### 1.3 Mise en œuvre discrète par transformation inverse



- mise en œuvre d'un filtre de reconstruction  $\Psi$  plus simple que par transformation directe

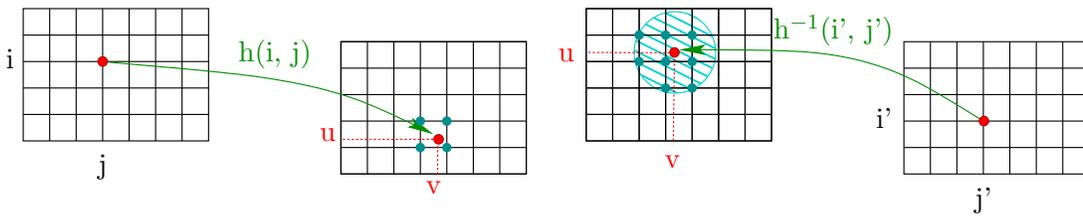
pour tout point  $(i', j')$  de  $D'$

{

$(u, v) = h^{-1}(i', j')$

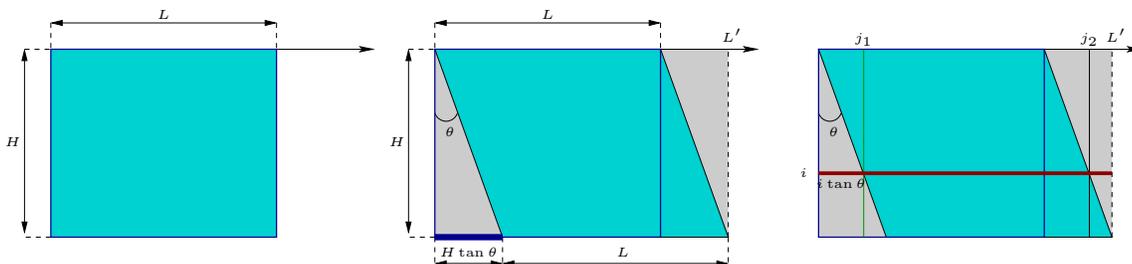
$I'(i', j') = \Psi(I, u, v)$

}



## 2 Cisaillement

### 2.1 Principe



- image de taille  $L \times H$
- **cisaillement** (*shearing*) d'angle  $\theta$   
nouvelle taille de l'image :  $L' \times H$  avec  $L' = L + \lfloor H \tan \theta \rfloor$
- translation de chaque ligne (formulation réelle)

$$(i, j) \rightarrow (i, j + i \tan \theta)$$

expression matricielle :

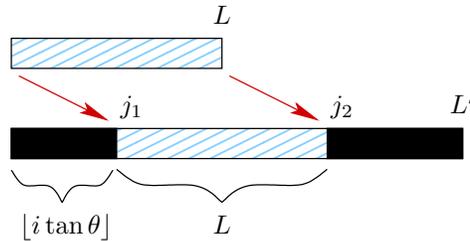
$$\begin{pmatrix} i' \\ j' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \tan \theta & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}$$

## 2.2 Mise en œuvre par transformation directe

- recopie de la ligne  $i$  en la décalant de  $\lfloor i \tan \theta \rfloor$

$$j_1 = \lfloor i \tan \theta \rfloor$$

$$j_2 = j_1 + L$$



- pour  $j$  variant de  $0$  à  $j_1 - 1$  :  $I'[i][j] = 0$
- pour  $j$  variant de  $j_1$  à  $j_2 - 1$  :  $I'[i][j] = I[i][j - j_1]$
- pour  $j$  variant de  $j_2$  à  $L'$  :  $I'[i][j] = 0$

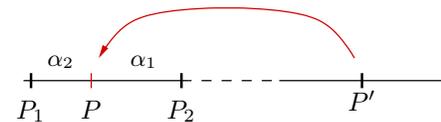
- problème de reconstruction : produit de l'aliasing



## 2.3 Impémentation par transformation inverse

- point de l'image transformée :  $P' = (i', j')$   
transformation inverse :  $P = (i', j' - i' \tan \theta)$

$$\begin{cases} P_1 = (i', \lfloor j' - i' \tan \theta \rfloor) \\ P_2 = (i', \lceil j' - i' \tan \theta \rceil) \end{cases}$$



- $I(P)$  : moyenne de  $I(P_1)$  et  $I(P_2)$  pondérée par l'**inverse** des distances  $\overline{PP_1}$  et  $\overline{PP_2}$

$$I(P') = I(P) \qquad \alpha_1 = \frac{\overline{PP_2}}{\overline{PP_2} - (j' - i' \tan \theta)}$$

$$= \alpha_1 I(P_1) + \alpha_2 I(P_2) \qquad = [j' - i' \tan \theta] - (j' - i' \tan \theta)$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1 \qquad \alpha_2 = (1 - \alpha_1)$$

- résultat de la reconstruction : suppression de l'aliasing



### 3 Rotation

#### 3.1 Mise en œuvre par inversion de la rotation

#### 3.2 Transformations multipasses

$$M = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

- $p' \in D'$ ,  $p = M^{-1}p'$
- reconstruction de  $I(p)$ , par exemple par interpolation sur les quatre voisins (Bartlett)
- stratégie : ramener la reconstruction en **dimension 1** (traitement plus efficace de l'antialiasing)

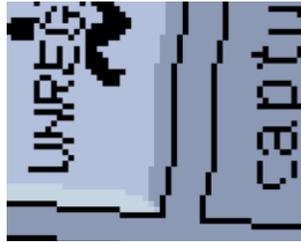
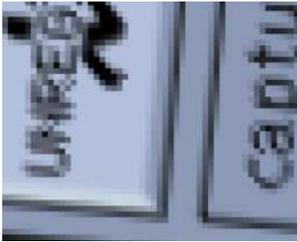
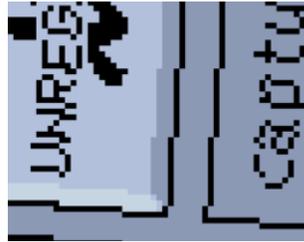
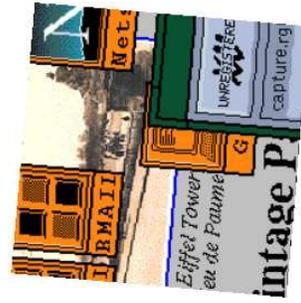
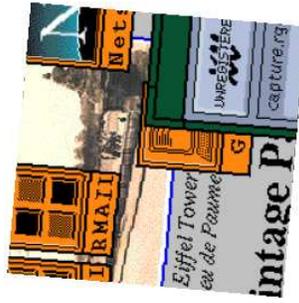
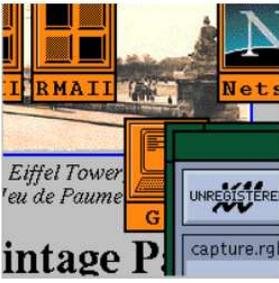
$$M = \begin{pmatrix} 1 & \tan -\frac{\theta}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sin \theta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \tan -\frac{\theta}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ c.à.d. } \begin{cases} x' = x + y \tan -\frac{\theta}{2} \\ y' = x' \sin \theta + y \\ x'' = x' + y' \tan -\frac{\theta}{2} \end{cases}$$

*Réécriture de la rotation comme composition de cisaillements*

- $x + y \tan -\frac{\theta}{2}$   
*cisaillement horizontal d'angle  $-\frac{\theta}{2}$*
- $x \sin \theta + y$   
*cisaillement vertical d'angle  $\arctan(\sin \theta)$*
- exemple : rotation de  $30^\circ$ 
  - *cisaillement horizontal de  $-15^\circ$*
  - *cisaillement vertical de  $26.57^\circ$*
  - *cisaillement horizontal de  $-15^\circ$*
- meilleurs résultats avec de petits angles  
(stabilité numérique) : complément à  $90^\circ$   
pour les grands angles



- exemple : sans avec antialiasing

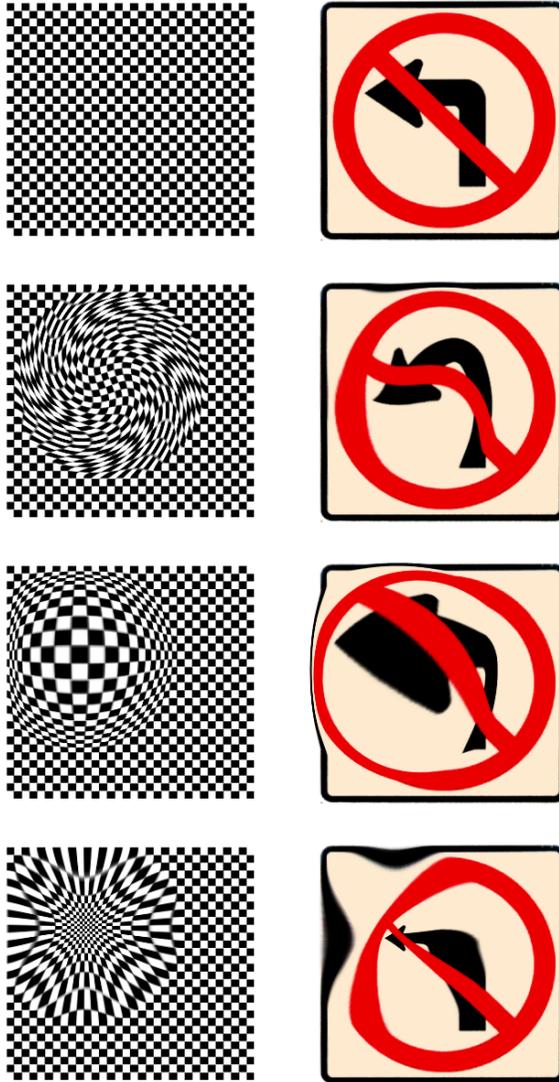


multipasse 85°

multipasse 90° – 5°

## 4 Distortion d'image (*warping*)

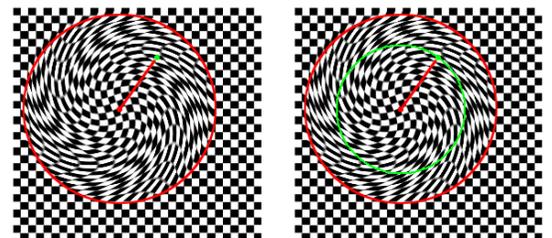
### 4.1 Déformations à support circulaire



- **tourbillon** (*swirl*) : rotation de chaque pixel  $p$  autour d'un point  $p_0$ , selon un angle qui croît ou décroît avec la distance
- **croissance** (*grow*) : déplacement radial de chaque pixel  $p$ , vers l'extérieur, selon une longueur qui croît ou décroît avec la distance à  $p_0$
- **réduction** (*shrink*) : *idem*, vers le centre

### Exemple : tourbillon

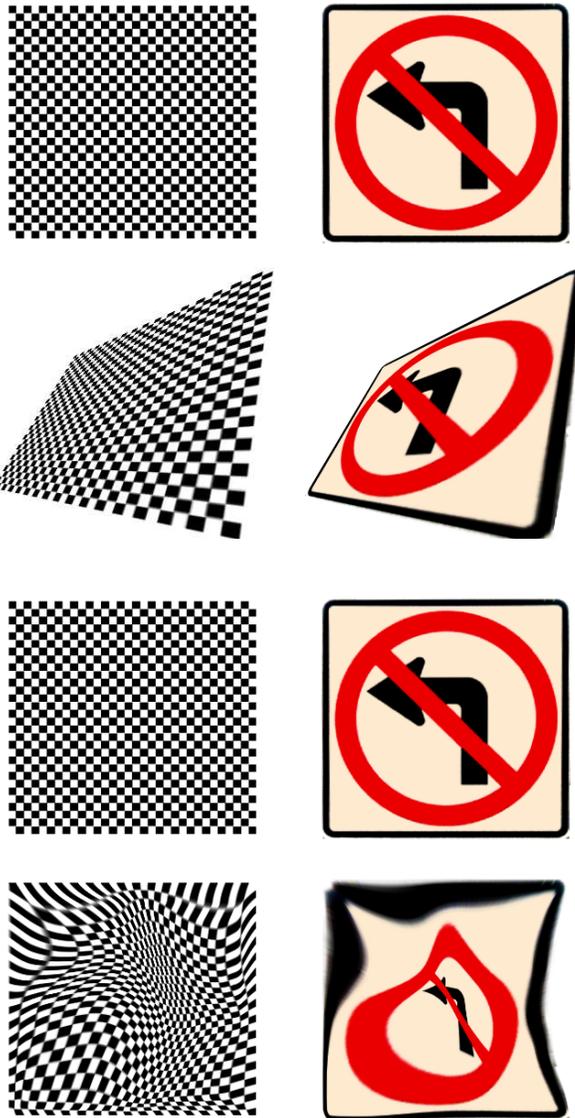
- mise en œuvre par **transformation inverse**
  - $(x_0, y_0)$  : centre de la déformation
  - $\rho$  : rayon de la déformation (borne)
  - $k$  : facteur de déformation
  - $(u, v) = \Psi^{-1}(x, y)$



passage dans le repère centré sur le tourbillon	$x' = x - x_0$ $y' = y - y_0$
calcul de distance au centre du tourbillon	$d = \sqrt{x'^2 + y'^2}$
restriction au rayon de la transformation	si $d > \rho$ , point suivant
calcul de l'image inverse (fonction de $d$ et $k$ )	$\alpha = f(d, k)$ $u' = x' \cos \alpha + y' \sin \alpha$ $v' = -x' \sin \alpha + y' \cos \alpha$
retour dans le repère initial	$u = u' + x_0$ $v = v' + y_0$
calcul de la couleur de $(x, y)$	reconstruction de $(u, v)$

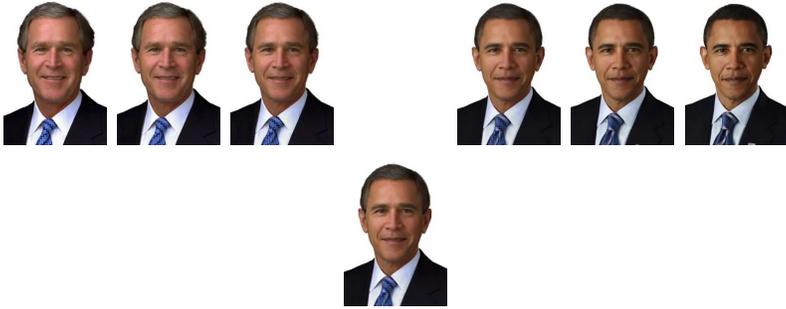
## 4.2 Transformation bilinéaire – « perspective »

### 4.3 Déformation libre (*move*)

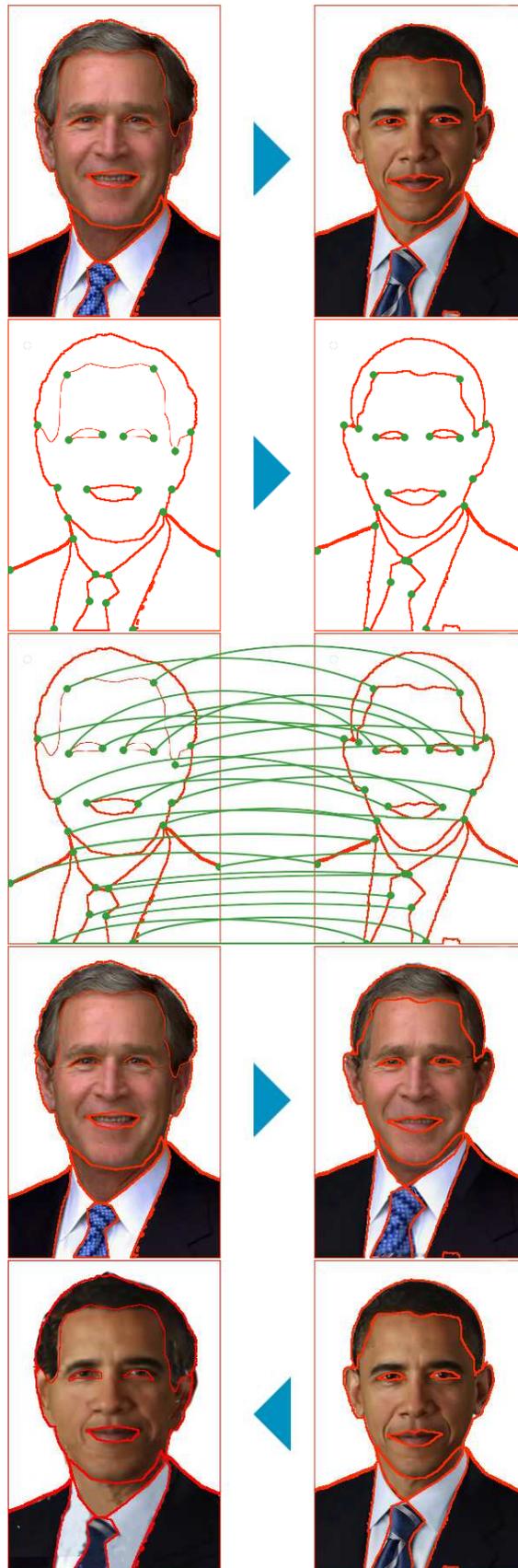


## 5 Morphing (morphage)

— Willow – Ron Howard, 1988



- pellicule argentique : fondu enchainé, inventé par Méliès vers 1900 (début du cinéma)
- ne permet pas de transformation de forme
- mise en correspondance de contours via des « points clés »
- faire correspondre les images par triangulation / interpolation des points clés



- génération de deux séquences par calcul et fondu des déformations intermédiaires
  - déformation de  $I_1$  vers les positions de  $I_2$
  - déformation de  $I_2$  vers les positions de  $I_1$
- fondu enchaîné entre les deux séquences

