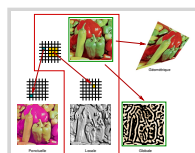


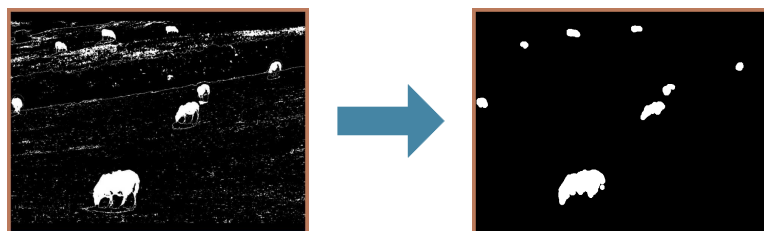
CES PAGES SONT DESTINÉES À FACILITER LA PRISE DE NOTES. ELLES SONT PRODUITES AUTOMATIQUEMENT À PARTIR DU SOURCE L^AT_EX/BEAMER DU DIAPORAMA SERVANT DE SUPPORT DE COURS. LA PRÉSENTATION ET LA MISE EN PAGE SONT PAR CONSÉQUENT APPROXIMATIVES.



transformation locale

Partie B — thème 3

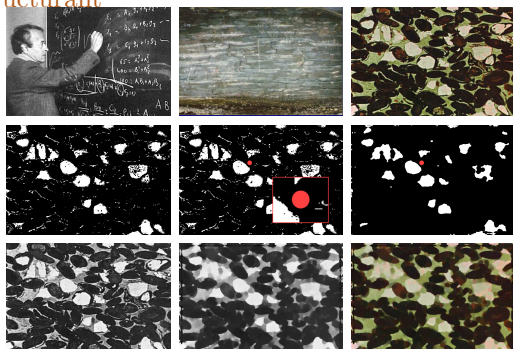
Transformations morphologiques



- opérateurs de traitements paramétrables par des informations géométriques
- analyse de structures spatiales (forme, taille, orientation, etc.) au voisinage de chaque pixel

1 Morphologie mathématique

- G. Matheron et J. Serra (géostatistiques) – papiers fondateurs : déc. 1964
- modélisation mathématique développée pour résoudre un problème concret d'analyse d'image géologique
- analyse quantitative de structures dans des milieux poreux (impact de migration de calcite sur les forages)
- initialement, opérations définies sur des ensembles de points : images binaires ↔ fonction caractéristique d'un ensemble
- repose sur l'utilisation de formes de référence : élément structurant



- approche **ensembliste** pour explorer des **formes** : opérateurs morphologiques construits à partir de \cap , \cup , \subset , etc.
- extension aux **images monochromes** : \cap et $\cup \rightarrow \min$ et \max
- extension aux **images couleurs** : marginal ou en vectoriel (relation d'ordre sur \mathcal{C})

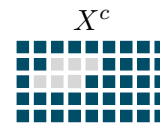
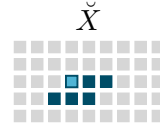
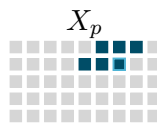
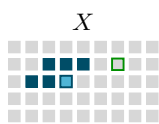
2 Primitives morphologiques

2.1 Élément structurant

- **ensemble** X de points de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ utilisé pour modifier une image
- choisi en fonction de sa **forme** et muni d'une **origine**
- exemples d'éléments structurants (E.S.)

E.S. isotropes			E.S. anisotropes	

- notations :



translation
au point p

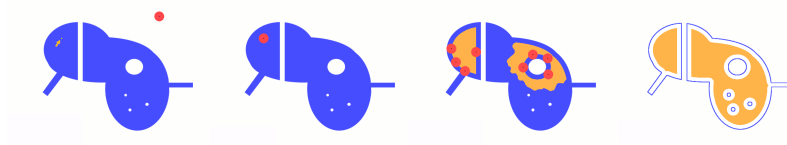
transposition :
symétrie % à l'origine

complémentaire

2.2 Érosion

- ε_X : **érosion** d'un ensemble E par un élément structurant X
- principe : on conserve seulement les points pour lesquels l'élément structurant est entièrement contenu dans l'ensemble

$$\varepsilon_X(E) = \{p / X_p \subseteq E\}$$



2.3 Dilatation

- δ_X : **dilatation** d'un ensemble E par un élément structurant X
- principe : on conserve tous les points pour lesquels l'élément structurant intersekte l'ensemble

$$\delta_X(E) = \{p / X_p \cap E \neq \emptyset\}$$



2.4 Exemples de dilatations et érosions

Exemple 1 : amélioration d'un masque

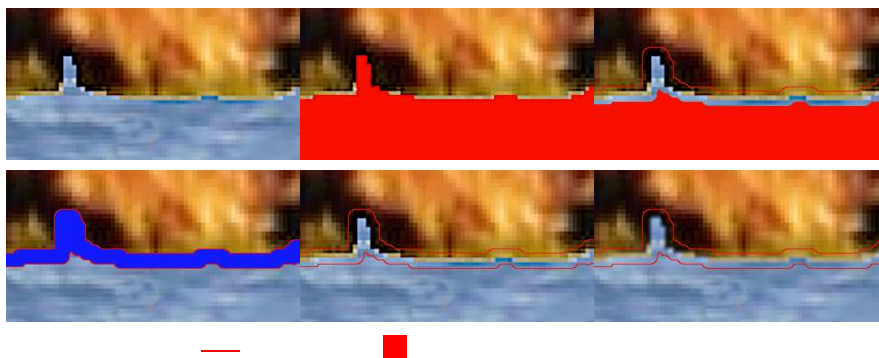
- masque : ensemble de points utilisé pour restreindre un traitement
- obtenu par seuillage, distance à une couleur, etc.



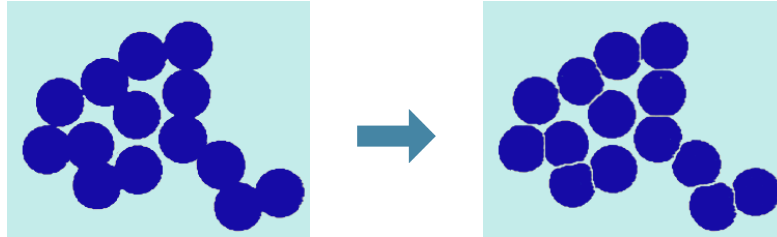
- le résultat est généralement imparfait et nécessite un retraitement : typiquement érosions et dilations

Exemple 2 : construction d'une frontière épaisse de région

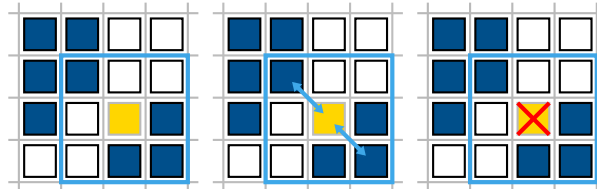
- application : construction d'un masque M permettant de restreindre un traitement à la transition entre deux régions
- bande entourant la frontière d'une région R différence entre dilatation et érosion



Exemple 3 : ajout de contraintes



- application à la séparation d'objets circulaires
- réduction de chaque objet à son centre par itération d'érosions
- restauration des formes initiales par itération de dilatations
- ajout de contraintes topologiques pour empêcher les reconnections



3 Opérateurs d'ouverture et de fermeture

3.1 Principe

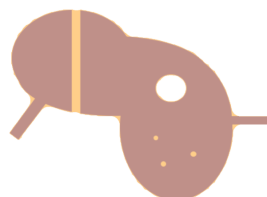
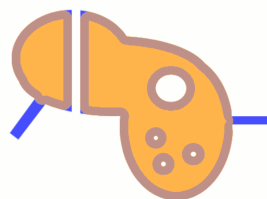
- les primitives δ et ε permettent de supprimer des détails mais modifient les frontières
- solution pour préserver les frontières : combiner érosion et dilatation :
 - deux nouvelles primitives : $\delta \circ \varepsilon$ et $\varepsilon \circ \delta$
 - même élément structurant à une transposition près : seconde opération effectuée dans la direction opposée

- ouverture (morphologique) par un élément structurant X

$$\gamma_X = \delta_X \circ \varepsilon_X$$

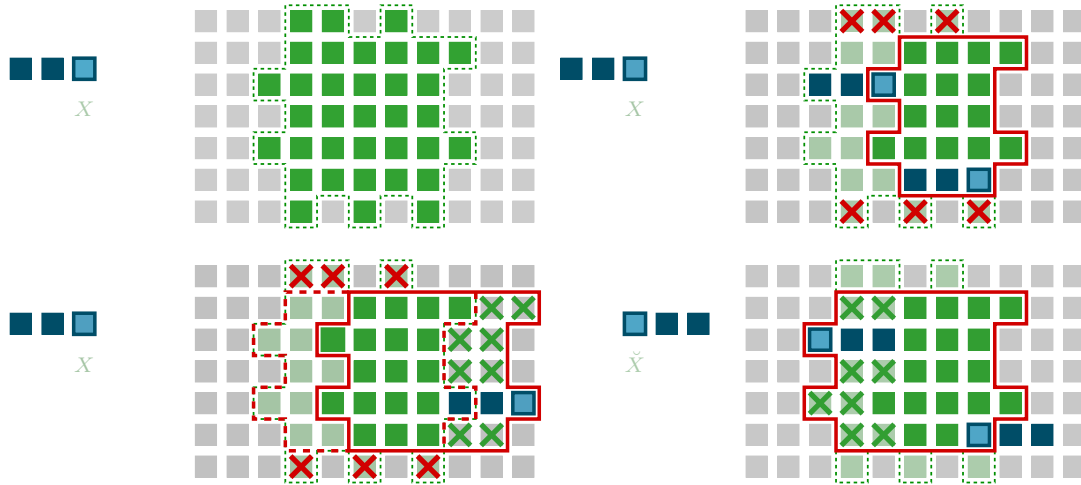
- fermeture (morphologique) par un élément structurant X

$$\varphi_X = \varepsilon_X \circ \delta_X$$



Nécessité de transposer l'ES s'il n'est pas symétrique

- exemple : ouverture de l'ensemble des points verts par l'ES X
- érosion par X : modification du bord gauche (bord droit inchangé)
- dilatation par X : modification du bord droit
- pour restaurer le bord gauche : dilatation par \check{X}



3.2 Exemples d'ouvertures et fermetures

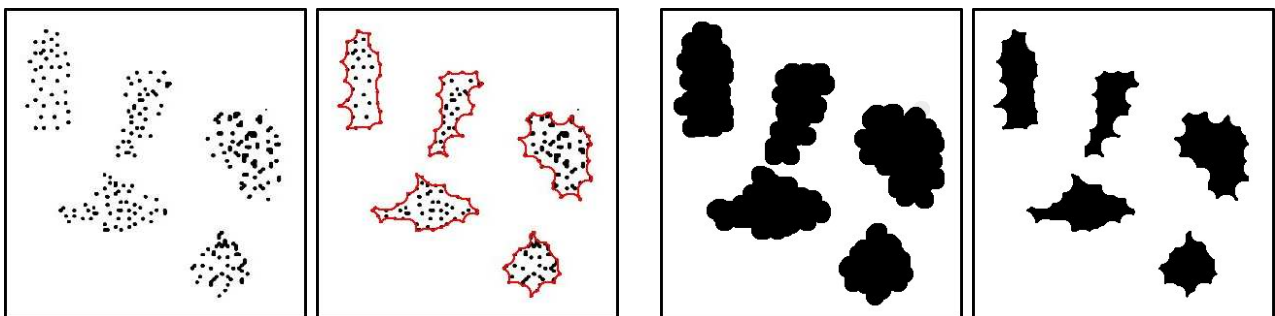
Connexion d'un ensemble de points

- fermeture de l'ensemble des points blancs au moyen d'un élément structurant circulaire
- la taille de l'ES permet de paramétrer le résultat



Frontière d'un ensemble non connexe de points

- fermeture de l'ensemble des points noirs au moyen d'un élément structurant circulaire de grande taille



dilatation + érosion

4 Des ensembles de points aux images binaires

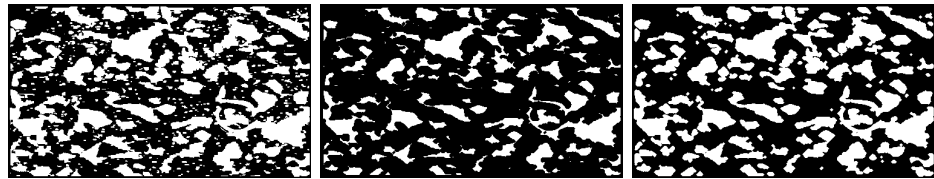
4.1 Convention de couleur

- image noir et blanc \leftrightarrow fonction caractéristique d'un ensemble
- points noirs ou points blancs : on choisit les points blancs

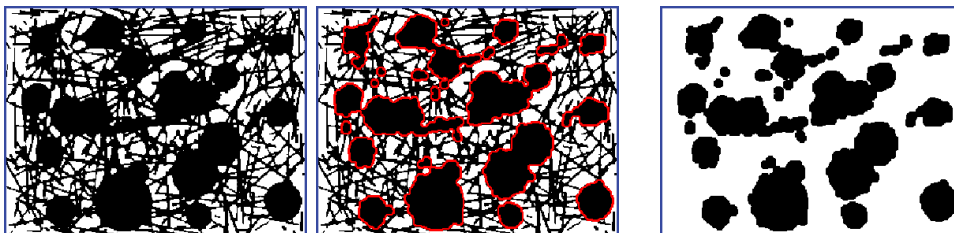
4.2 Exemples d'applications

Suppression d'éléments non significatifs

- suppression des petites taches blanches
- **érosion** avec un ES circulaire de diamètre supérieur à la plus grande largeur des éléments à supprimer
+ **dilatation** = **ouverture**



- suppression des traits noirs avec préservation de la taille des grosses taches
- ? **fermeture** avec un ES circulaire de diamètre supérieur à l'épaisseur des traits



Extraction d'éléments significatifs d'une image seuillée

- image seuillée selon la luminance (canal V)



- éliminer les zones blanches non significatives : **ouverture**
- **fermeture** pour reconnecter

5 Extension aux images monochromes

5.1 Définition alternative des primitives morphologique

- on note $E_{-\vec{x}}$ la **translation** de E selon le vecteur \vec{x}

- $\vec{x} \in X$: vecteurs définis à partir de l'origine de l'élément structurant X
- érosion

$$\varepsilon_X(E) = \bigcap_{\vec{x} \in X} E_{-\vec{x}}$$



- dilatation

$$\delta_X(E) = \bigcup_{\vec{x} \in X} E_{-\vec{x}}$$

- on étend cette définition aux images monochromes en construisant une correspondance entre \bigcap (resp. \bigcup) sur les images binaires et min (resp. max) sur les images monochromes : principe de superposition des coupes

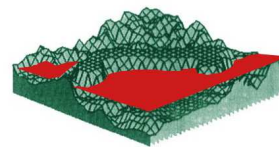
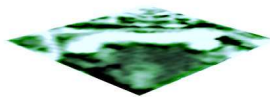
5.2 Principe de superposition des coupes

- expression d'une image monochrome comme une somme d'images binaires
- coupe (*cross section*) : analogie avec les images topographiques
 - coupe CS_i : seuillage entre les « altitudes » i et i_{max}

$$CS_i = T_{[i, i_{max}]}$$

- on a :

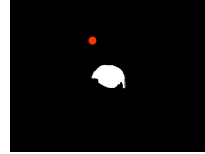
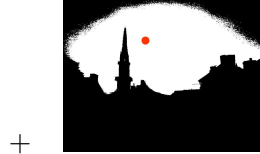
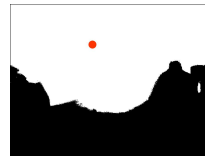
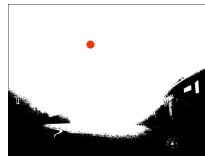
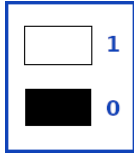
$$CS_{i_{max}}(I) \subseteq CS_{i_{max}-1}(I) \subseteq \dots \subseteq CS_1(I)$$



$I : D \rightarrow [0..5]$ coupe d'« altitude » 1 : $CS_1(I)$ coupe
 d'« altitude » 2 : $CS_2(I)$ coupe d'« altitude » 3 :
 $CS_3(I)$ coupe d'« altitude » 4 : $CS_4(I)$ coupe
 d'« altitude » 5 : $CS_5(I)$

- une image monochrome est égale à la somme de ses coupes

$$I(p) = \sum_{i=1}^{i_{max}} \mathbf{CS}_i(I)(p)$$



=



5.3 Généralisation des définitions des primitives morphologique

image N&E;B (ensembles)	images monochromes
\cap	\wedge : minimum
\cup	\vee : maximum

— minimum et maximum de deux images : point par point

$$(I \wedge J)(p) = \min\{I(p), J(p)\}$$

$$(I \vee J)(p) = \max\{I(p), J(p)\}$$

— généralisation de l'érosion

$$\varepsilon_X(E) = \bigcap_{\vec{x} \in X} E_{-\vec{x}} \quad \longrightarrow \quad \varepsilon_X(I) = \bigwedge_{\vec{x} \in X} I_{-\vec{x}}$$

— généralisation de la dilatation

$$\delta_X(E) = \bigcup_{\vec{x} \in X} E_{-\vec{x}} \quad \longrightarrow \quad \delta_X(I) = \bigvee_{\vec{x} \in X} I_{-\vec{x}}$$

— cela revient à définir l'érosion (resp. dilatation) d'une image monochrome I comme la somme des érosions (resp. dilatations) des coupes de I

— on note I^p la coupe $\mathbf{CS}_p(I)$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_X(I) &= \varepsilon_X(I^1) + \varepsilon_X(I^2) + \dots + \varepsilon_X(I^k) \\
&= \bigcap_{\vec{x} \in X} I_{\vec{x}}^1 + \bigcap_{\vec{x} \in X} I_{\vec{x}}^2 + \dots + \bigcap_{\vec{x} \in X} I_{\vec{x}}^k \\
&= \bigwedge_{\vec{x} \in X} I_{\vec{x}}^1 + \bigwedge_{\vec{x} \in X} I_{\vec{x}}^2 + \dots + \bigwedge_{\vec{x} \in X} I_{\vec{x}}^k
\end{aligned}$$

car \cap et \min (resp. \cup et \max) ont les mêmes table de vérité sur $\{0,1\}$

$$\begin{aligned}
&= \bigwedge_{\vec{x} \in X} (I_{\vec{x}}^1 + I_{\vec{x}}^2 + \dots + I_{\vec{x}}^k) \\
&= \bigwedge_{\vec{x} \in X} I_{\vec{x}}
\end{aligned}$$

\cap / \min	0	1
0	0	0
1	0	1

5.4 Calcul des primitives monochrome

— mise en œuvre de l'érosion d'image monochrome : expression en un point p

$$\begin{aligned}
\varepsilon_X(I)(p) &= \left(\bigwedge_{\vec{x} \in X} I_{-\vec{x}} \right)(p) \\
&= \min_{\vec{x} \in X} (I_{-\vec{x}}(p)) \\
&= \min_{\vec{x} \in X} I(p + \vec{x})
\end{aligned}$$

→ c'est le minimum de tous les points couverts par l'élément structurant

— mise en œuvre de la dilatation d'image monochrome

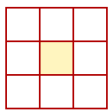
$$\delta_X(I)(p) = \max_{\vec{x} \in X} I(p + \vec{x})$$

→ c'est le maximum de tous les points couverts par l'élément structurant

Exemple avec un ES carré de demi largeur 1

— $\varepsilon_X(I)(p) = \min_{\vec{x} \in X} I(p + \vec{x}) \rightarrow ?1$

— $\delta_X(I)(p) = \max_{\vec{x} \in X} I(p + \vec{x}) \rightarrow ?8$



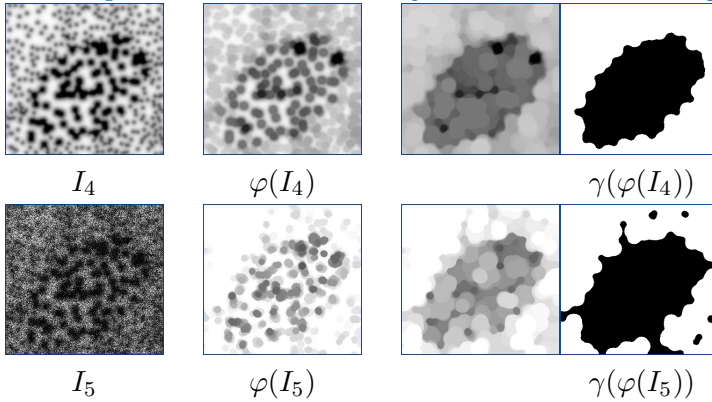
9	4	7	8	9	5	3	1	4
9	4	1	5	7	4	1	9	8
2	1	1	2	4	2	8	7	8
5	2	5	8	5	2	5	3	7
7	8	3	4	3	9	2	3	4
2	9	1	8	9	1	1	2	8
5	8	8	8	4	3	1	7	9

9	4	7	8	9	5	3	1	4
9	4	1	5	7	4	1	9	8
2	1	1	2	4	2	8	7	8
5	2	5	8	5	2	5	3	7
7	8	3	4	3	9	2	3	4
2	9	1	8	9	1	1	2	8
5	8	8	8	4	3	1	7	9

9	4	7	8	9	5	3	1	4
9	4	1	5	7	4	1	9	8
2	1	1	2	4	2	8	7	8
5	2	5	8	5	2	5	3	7
7	8	3	4	3	9	2	3	4
2	9	1	8	9	1	1	2	8
5	8	8	8	4	3	1	7	9

9	4	7	8	9	5	3	1	4
9	4	1	5	7	4	1	9	8
2	1	1	2	4	2	8	7	8
5	2	5	8	5	2	5	3	7
7	8	3	4	3	9	2	3	4
2	9	1	8	9	1	1	2	8
5	8	8	8	4	3	1	7	9

— Exemple d'extraction d'un objet diffus dans une image monochrome bruitée



6 Quelques propriétés des primitives morphologiques

6.1 Primitives ensemblistes (images binaires)

— **idempotence** de l'ouverture et de la fermeture :

$$\gamma\gamma = \gamma \quad \text{et} \quad \varphi\varphi = \varphi$$

— **dualité** :

$$\begin{cases} \delta_X = \mathbb{C}\varepsilon_X\mathbb{C} & \gamma_X = \mathbb{C}\varphi_X\mathbb{C} \\ \varepsilon_X = \mathbb{C}\delta_X\mathbb{C} & \varphi_X = \mathbb{C}\gamma_X\mathbb{C} \end{cases}$$

érosion/ouverture des parties noires (resp. blanches)



dilatation/fermeture des parties noires (resp. blanches)

— **extensivité** / **anti-extensivité** de l'érosion et de la dilatation :

$$\begin{cases} \varepsilon_X(E) \subset E \\ E \subset \delta_X(E) \end{cases}$$

6.2 Préservation des propriétés pour les images monochromes

— **idempotence** de l'ouverture et de la fermeture

— **dualité**

$$\delta_X = \mathbb{C}\varepsilon_X\mathbb{C}$$

$$\gamma_X = \mathbb{C}\varphi_X\mathbb{C}$$



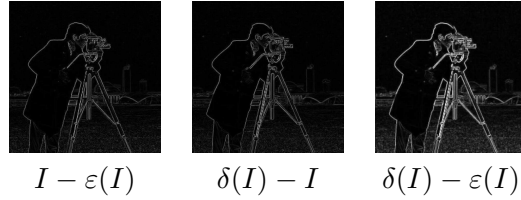
$$\mathbb{C}(\delta_X(\varepsilon_X(\mathbb{C}(I)))\mathbb{C}) = \delta_X(I)$$

— extensivité / anti-extensivité

$$\begin{cases} \varepsilon_X(I)(p) \leq I(p) \\ I(p) \leq \delta_X(I)(p) \end{cases}$$

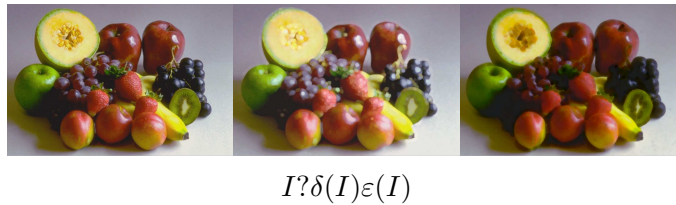
— et donc : $I - \varepsilon(I)$, $\delta(I) - I$ et $\delta(I) - \varepsilon(I)$ sont à valeur dans $\in [0..I_{max}]$

— gradients de Beucher (interne, externe et standard) :

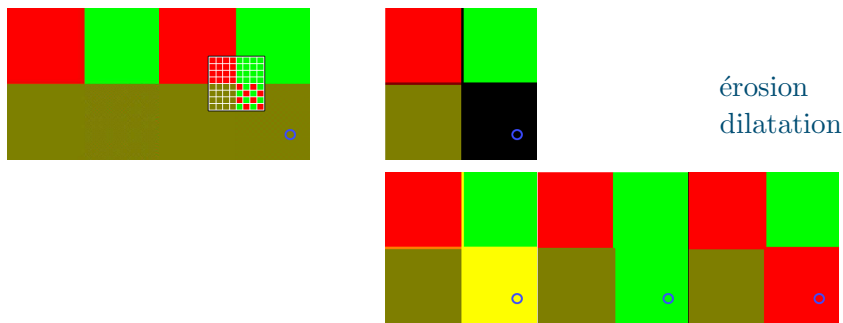


7 Extension aux images RGB

— mise en œuvre marginale



— alternative entre traitement marginal et vectoriel (ordre entrelacé)
 — pas de solution idéale (pas de bonne relation d'ordre sur les couleurs)



$$\min \left\{ \begin{pmatrix} 255 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 255 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\max \left\{ \begin{pmatrix} 255 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 255 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} 255 \\ 255 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$R = 100100100100100100100$$

$$G = 010010010010010010010$$

$$B = 100100100100100100100$$

$$\min \begin{cases} 100100100100100100100 \\ 010010010010010010010 \end{cases} = 010010010010010010010$$

$$\max \begin{cases} 100100100100100100100 \\ 010010010010010010010 \end{cases}$$