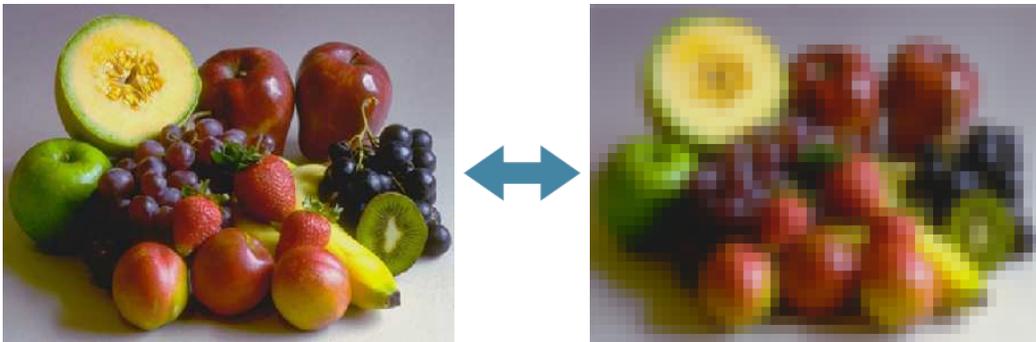


CES PAGES SONT DESTINÉES À FACILITER LA PRISE DE NOTES. ELLES SONT PRODUITES AUTOMATIQUEMENT À PARTIR DU SOURCE L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X/BEAMER DU DIAPORAMA SERVANT DE SUPPORT DE COURS. LA PRÉSENTATION ET LA MISE EN PAGE SONT PAR CONSÉQUENT APPROXIMATIVES.

## Partie A — thème 5

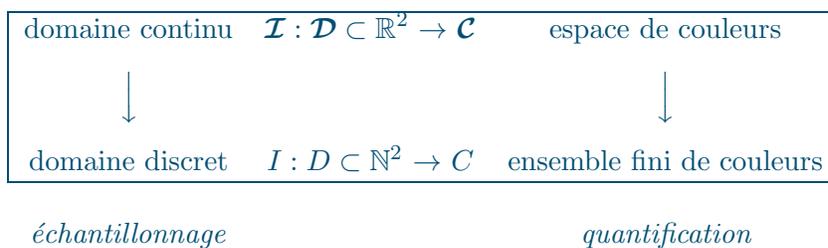
### Discrétisation et reconstruction d'une image continue



## 1 Discrétisation d'une image continue 2D

### 1.1 Discrétisation = échantillonnage + quantification

- processus analogue à celui mis en œuvre par le SVH
- combinaison de deux fonctionnalités :



## 1.2 Échantillonnage (*sampling*)

- sélection des échantillons :
  - nombre d'échantillons  $\rightarrow$  taille (résolution) de l'image
  - organisation spatiale
- méthode de détermination de la valeur de chaque échantillon



$$400 \times 300 \rightsquigarrow 200 \times 150 \rightsquigarrow 100 \times 75 \rightsquigarrow 50 \times 37$$

## 1.3 Quantification (*quantization*)

- sélection des valeurs possibles des échantillons
  - nombre de niveaux (gris / couleur) de l'image
  - organisation régulière ou irrégulière de ces niveaux
- méthode de détermination de l'ensemble des couleurs de l'image discrétisée



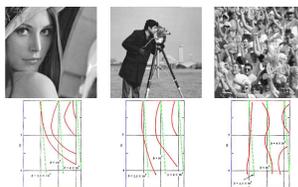
$$2^{16}(65536) \rightsquigarrow 2^{10}(1024) \rightsquigarrow 2^7(128) \rightsquigarrow 2^4(16) \rightsquigarrow 2^1(2)$$

## 1.4 Le choix $N.m$

- faut-il privilégier la résolution spatiale ou en niveaux ?
- pour une image monochrome carrée  $I$ 
  - de  $N$  pixels de côté
  - avec  $2^m$  niveaux de gris
- nombre de bits pour coder  $I$  :  $?N^2 \times m$
- exemples de formats d'images de 1M bits :

Taille		Niveaux
1024 × 1024	× 1 bit	$2^1 = 2$ niveaux
512 × 512	× 4 bits	$2^4 = 16$ niveaux
approx. 341 × 341	× 9 bits	$2^9 = 512$ niveaux
256 × 256	× 16 bits	$2^{16} = 65536$ niveaux

- expérience avec trois types d'images [Huang 1965]



- pas de solution générale

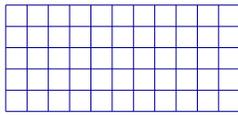
- courbes d'isopréférence dépendant de la nature de l'image.
- différentes pour une même image.
- peu de détails : plutôt privilégier la quantification
- beaucoup de détails : plutôt la conclusion inverse.

## 2 Échantillonnage d'image 2D

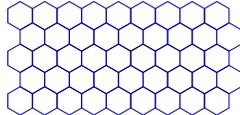
### 2.1 Échantillonnage régulier

#### Pavages réguliers dans $\mathbb{R}^2$

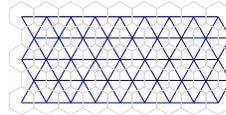
- trois solutions théoriques pour choisir une grille régulière :



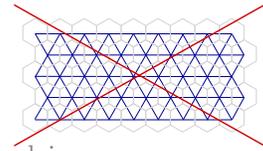
carrée (ou rectangulaire)



hexagonale

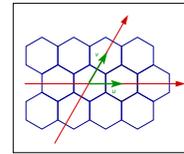
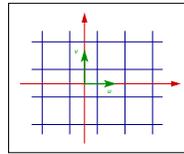


triangulaire



- grille triangulaire (duale de l'hexagonale) : pas d'intérêt pratique
- générateur des positions des pavés :  $n_1v_1 + n_2v_2$ ,  $n_1 \in \mathbb{Z}, n_2 \in \mathbb{Z}$

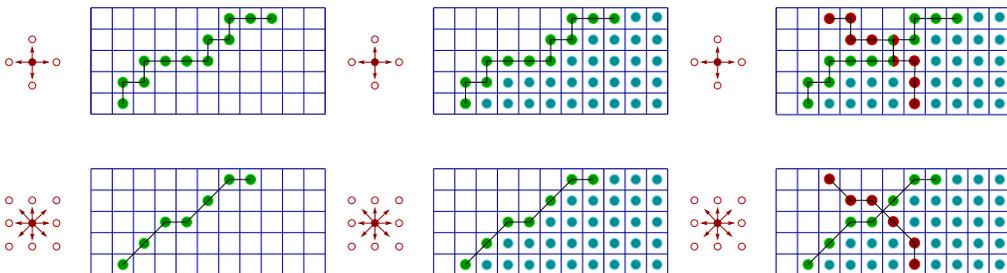
$$(v_1, v_2) = \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$



$$(v_1, v_2) = \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \right)$$

#### Grille carrée / rectangulaire

- plan discret : nécessité de choisir un voisinage (courbes, frontières)
- grille carrée : 4-connexité ou 8-connexité

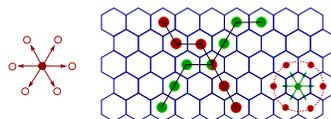


problèmes géométriques

problèmes topologiques

#### Grille hexagonale

- meilleure solution théorique



- mais moins intuitive (plan mathématique avec repère orthonormé, lignes  $\times$  colonne)

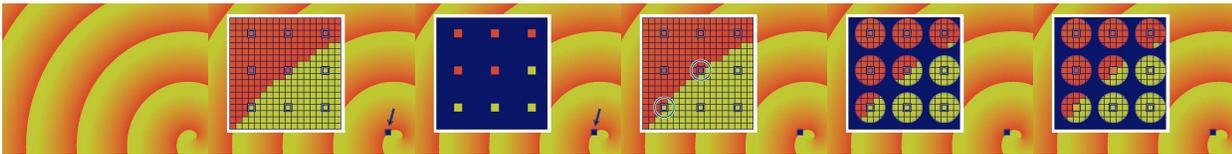
## 2.2 Échantillonnage adaptatif

- adapter la densité des échantillons au niveau de détail



- acquisition
  - *suppose une connaissance a priori*
  - *difficilement applicable en pratique*
- synthèse :
  - *utilisation des informations de modélisation*
  - *raffinement automatique en fonction de la variation locale de la couleur calculée (compatible avec le lancer de rayon)*
- qualité de l'échantillonnage → qualité de la **reconstruction**

## 2.3 Stratégie d'attribution d'une valeur aux échantillons



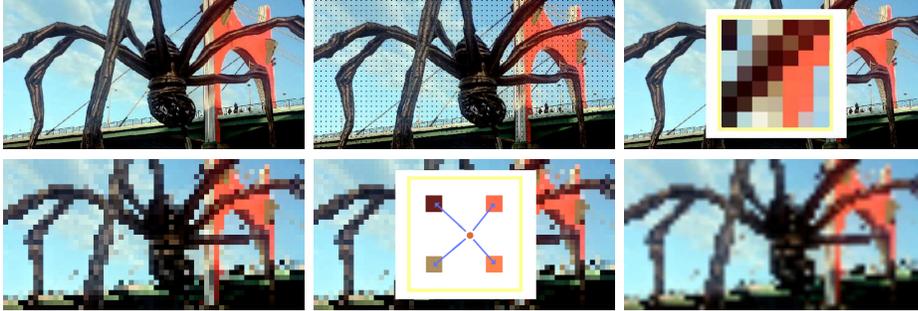
- échantillonnage régulier (grille carrée)
- valeur des échantillons
  - *valeur des points sur lesquels ils sont prélevés*
  - *problème avec les transitions abruptes : caractère aléatoire*
  - *échantillonnage fonction d'un voisinage des échantillons*

## 3 L'opérateur de convolution

### 3.1 Un outil pour la reconstruction d'un signal échantillonné

- échantillonnage régulier défini sur une grille carrée
- comment reconstruire les informations manquantes ?

- *recopier* la valeur de chaque échantillon sur tout son voisinage
- *interpoler* en fonction des valeurs des échantillons voisins (par exemple, moyenne pondérée par la distance)

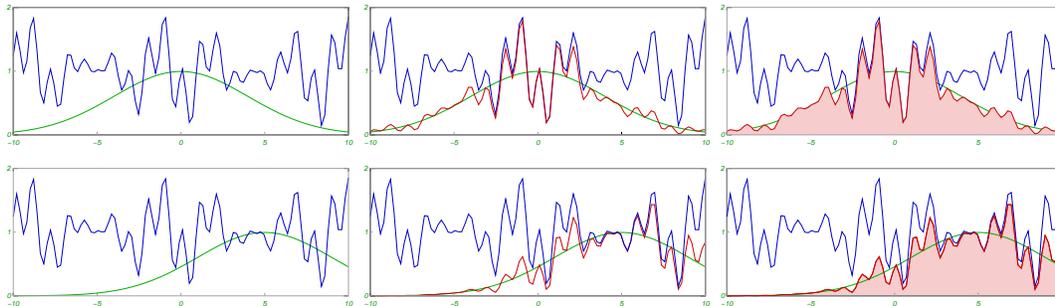


- peut-on faire mieux ?
  - oui, en utilisant davantage d'échantillons
  - nécessité d'un outil mathématique pour exprimer cette opération : *produit de convolution*

### 3.2 Produit de convolution

Principe : pondération point par point d'une fonction par une autre fonction

$x = 0$   
 $x = 5$



$g(u)$   
 $f(u - 5)$   
 $f(u - 5) \times g(u)$

- pondération de  $g(u)$  par  $f(u)$  autour de  $x$

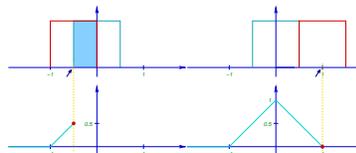
- translation de l'origine de  $f$  au point  $x$
- produit des deux fonctions
- calcul de l'aire du résultat

$$\Rightarrow \text{au point } x, \text{ on calcule : } \int_{-\infty}^{+\infty} f(u - x)g(u)du$$

- exemple :

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } x \in ]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$f(x) = g(x)$$



$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u - x)g(u)du$$

### Définition du produit de convolution : $f * g$

- opération notée  $*$  : somme des valeurs d'une fonction  $g$  pondérées par une fonction  $f$
- la fonction  $f$  est appelée le **noyau** de la convolution
- formellement, on utilise le **symétrique** de  $f$  (permet de rendre  $*$  commutatif)
- on note  $f^-$  le symétrique de  $f$  :  $f^-(u) = f(-u)$   
expression de la **translation** de  $f^-(u)$  au point  $x$  :  
$$f^-(u-x) = f(-(u-x)) = f(x-u)$$
- définition du produit de convolution de fonctions 1D :

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-u)g(u)du$$

- définition 2D

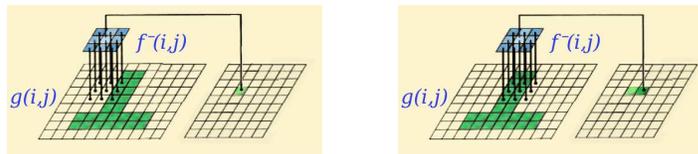
$$(f * g)(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-u, y-v)g(u, v)dudv$$

### Convolution discrète 2D

- $g$  : image discrète (matrice de pixels)
- $f$  (noyau) : matrice de convolution de taille  $(2D_i + 1) \times (2D_j + 1)$

$$(f * g)(i, j) = \sum_{i'=-D_i}^{D_i} \sum_{j'=-D_j}^{D_j} f^-(i'-i, j'-j)g(i', j')$$

- $f^-$  : symétrique de  $f$  par rapport à son centre



### 3.3 Propriétés

- commutativité (découle par construction de l'utilisation du symétrique dans la définition du produit)

$$f * g = g * f$$

- associativité

$$(f * g) * h = f * (g * h)$$

- distributivité

$$f * h + g * h = (f + g) * h$$

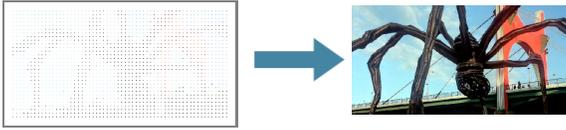
### 3.4 Théorème de convolution.

Le **produit de convolution** dans le domaine **spatial** correspond au **produit de fonctions** dans le domaine **fréquentiel**

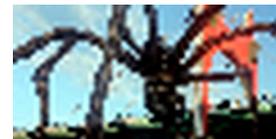
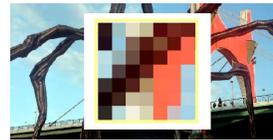
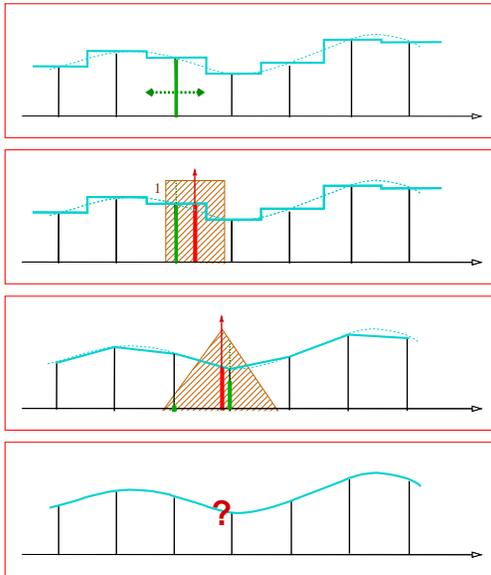
$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f * g) &= \mathcal{F}(f) \times \mathcal{F}(g) \\ f * g &= \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f) \times \mathcal{F}(g))\end{aligned}$$

## 4 Reconstruction d'image échantillonnée

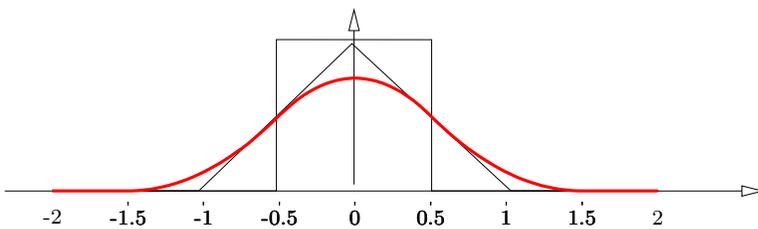
### 4.1 Reconstruction par convolution



- moyenne pondérée des échantillons sur un voisinage
- convolution du signal échantillonné par un **filtre de reconstruction**
- le filtre fournit les coefficients de pondération des échantillons



#### Filtres usuels



- ordre 0 : **boîte** (box) sur  $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$
- ordre 1 : **tente** (tent) ou de Bartlett sur  $]-1, 1]$

$$tent = box * box$$

- ordre 2 : **cloche** (bell) sur  $]-1.5, 1.5]$

$$bell = box * box * box$$

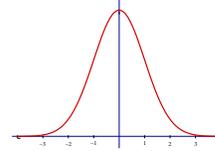
— etc.

— formes analytiques :

$$\begin{aligned} \text{--- } box(x) &= 1 \text{ si } -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ &= 0 \text{ sinon} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{--- } tent(x) &= 1 + x \text{ si } -1 \leq x \leq 0 \\ &= 1 - x \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \\ &= 0 \text{ sinon} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{--- } bell(x) &= -x^2 + \frac{3}{4} \text{ si } |x| \leq \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}(|x| - \frac{3}{2})^2 \text{ si } \frac{1}{2} < |x| \leq \frac{3}{2} \\ &= 0 \text{ sinon} \end{aligned}$$

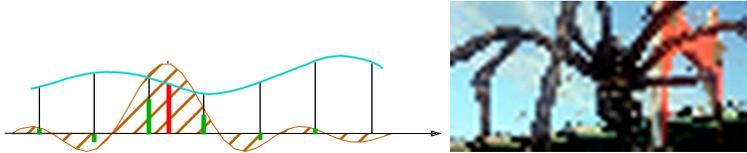


— ces filtres tendent vers la **gaussienne** :

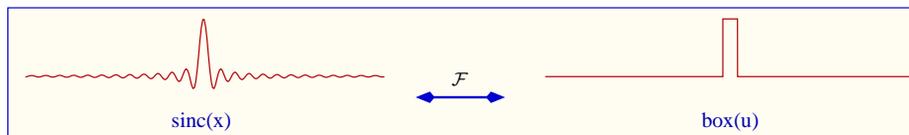
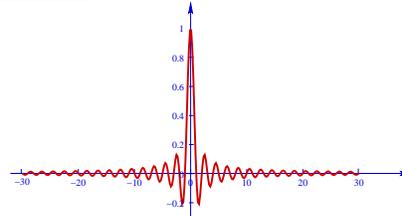
$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$

mais ne permettent pas de reconstruire finement les détails (lissage)

— filtre « idéal » : **sinus cardinal**



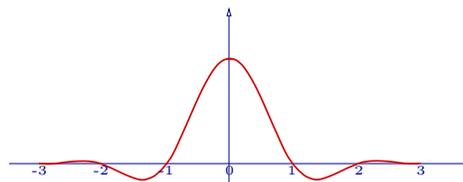
$$sinc(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x}$$



— sinc : filtre de domaine **infini**

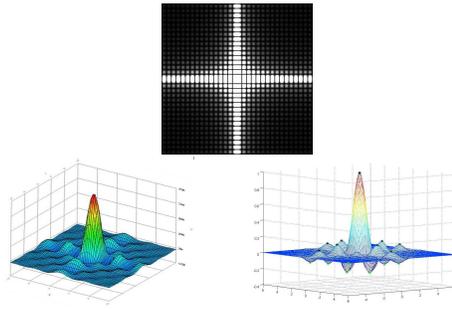
— on approxime *sinc* par le filtre de Lanczos défini sur  $] -3, 3 ]$  :

$$\frac{\sin \pi x}{\pi x} \times \frac{\sin \frac{\pi x}{3}}{\pi \frac{x}{3}}$$



— en dimension 2 :

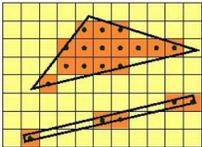
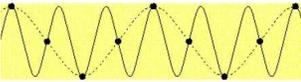
$$sinc(x, y) = sinc(x) \times sinc(y)$$



## 4.2 Caractérisation de l'erreur : aliasing et fréquence de coupure

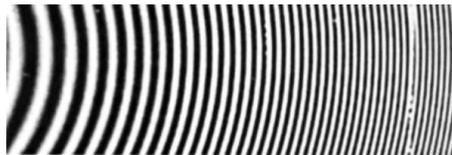
### Le phénomène d'aliasing

- échantillons trop distants pour capturer toute l'information : fréquence d'échantillonnage trop basse par rapport à celle du signal échantillonné
- conséquence : deux signaux différents peuvent être reconstruits à l'identique (alias = synonyme)
- altérations géométriques : crénelage
- altérations topologiques : connexions/déconnexions
- reconstruction d'informations erronées : artefacts, battements



### Exemples d'artefacts dus au phénomène de battement

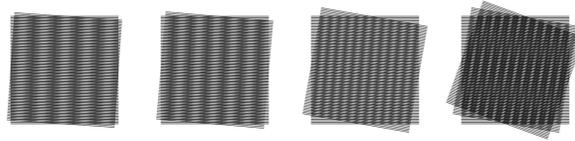
- image de la fonction  $\sin(x^2 + y^2)$



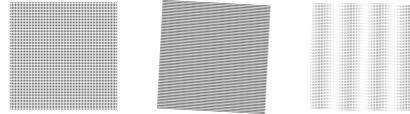
- erreur de reconstruction (battement)



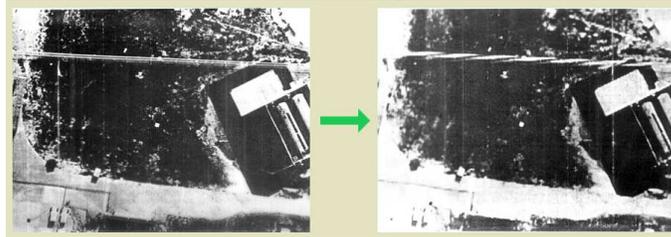
- phénomène de moiré



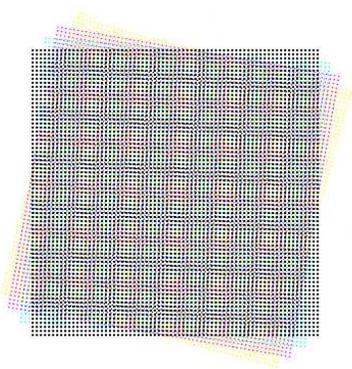
— intersection d'une grille carrée et d'une trame de lignes parallèles : battement



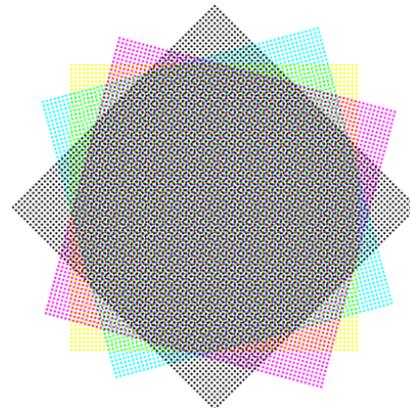
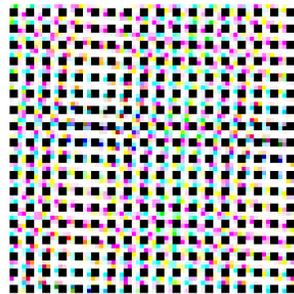
### Exemple 1 : artefact sur une reconstruction d'image aérienne



### Exemple 2 : superposition de trames en quadrichromie



trames C-M-Y-K décalées à 5°  
apparition de moiré



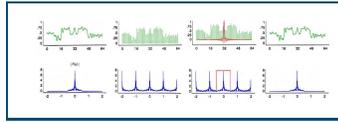
solution retenue :  
Y : 0° - C : 15° - B : 45° - M : 75°

## 4.3 Théorème de Nyquist-Shannon

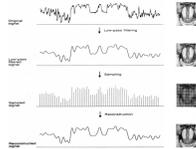
— exprime la **condition limite** au delà de laquelle il n'est plus possible de reconstruire le signal sans erreur :

fréq. d'échantillonnage  $> 2 \times$  fréq. maximale du signal  
reconstruction avec le filtre sinus cardinal (*sinc*)

— **fréquence de coupure** (ou de Nyquist)



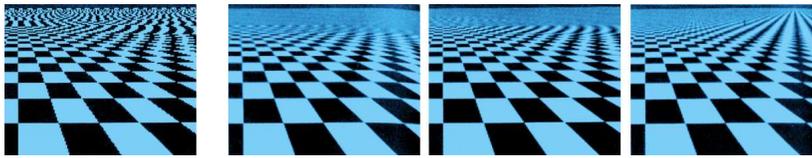
- solution **théorique** : suppression de toutes les fréquences au-dessus de la fréquence de coupure avant échantillonnage
- en pratique :
  - difficile de connaître précisément la fréquence de coupure
  - un **filtrage passe-bas** permet de réduire le phénomène d'aliasing



- problématique également présente en synthèse d'image  
*exemple : lancer de rayons sur un damier infini*



- si le damier s'étend à l'infini, à l'horizon la fréquence augmente aussi à l'infini



- on ne peut lancer une infinité de rayons pour capturer toute l'information  $\implies$  filtrage passe bas

### Exemple de réduction naïve d'une image tramée



$I$



$I_1$

$I_3$



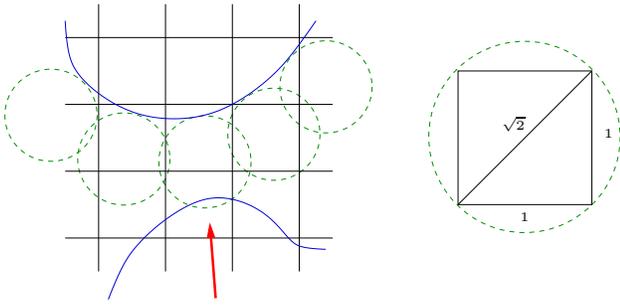
$I_2$

$I_4$

- $I_1$  : extrait à échelle 1 de l'image tramée  $I$
- $I_2$  : idem après filtrage passe-bas
- $I_3$  et  $I_4$  : sous-échantillonnage de  $I$  (1 pixel sur 4)

### Analogie géométrique 2D du théorème de Nyquist-Shannon

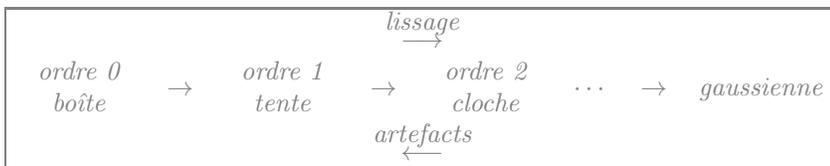
- tracé compatible avec une grille d'échantillonnage : en tout point de la frontière de chaque région on doit pouvoir faire tangenter de chaque côté de la frontière un disque de diamètre  $\sqrt{2}$  sans que le disque et la frontière s'intersectent



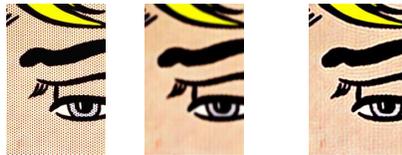
## 5 Application à l'agrandissement d'image

### 5.1 Principe

- application d'un filtre de reconstruction sur l'image à agrandir
- choix du filtre

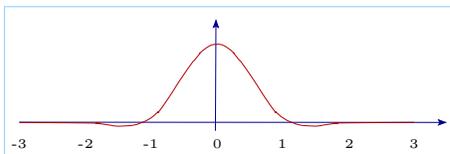


- filtre idéal : l'approximation finie de *sinc* produit des échos



gaussienne    sinus cardinal  
(lanczos)

- bon compromis : filtre de Mitchell-Netravali (1988) :



- formulation générale :

- pour  $x \in [-1, +1]$  :

$$\frac{1}{6} ((12 - 9B - 6C)|x|^3 - (18 - 12B - 6C)x^2 + (6 - 2B))$$

- pour  $x \in [-2, -1] \cup [1, 2]$  :

$$\frac{1}{6} ((-B - 6C)|x|^3 + (6B + 30C)x^2 - (12B + 48C)|x| + 8B + 24C)$$

- sinon 0

- bon compromis entre gaussienne et *sinc* pour  $B = C = \frac{1}{3}$

- pour  $x \in [-1, +1]$  :

$$\frac{7}{6}|x|^3 - 2x^2 + \frac{8}{9}$$

- pour  $x \in [-2, -1] \cup [1, 2]$  :

$$-\frac{7}{18}|x|^3 + 2x^2 - \frac{10}{3}|x| + \frac{16}{9}$$

— sinon 0

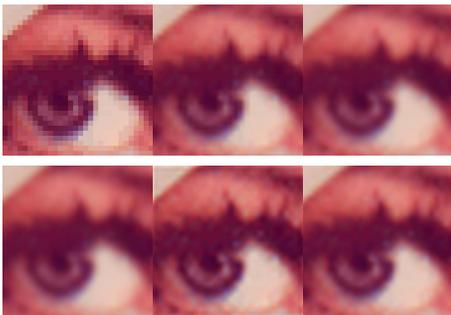
— dimension 2 : composition de deux opérateurs de dimension 1 (ligne, colonne)

## Comparaison des différents filtres



*échantillons box bartlett bell bspline lanczos mitchell-netravali*

— récapitulatif

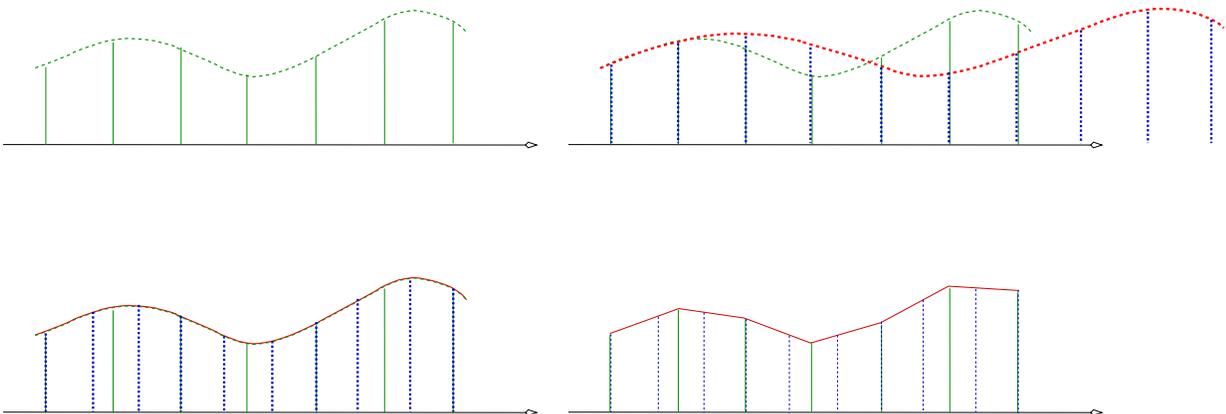


box	bartlett	bell
bspline	Lanczos	Mitchell-Netravali

## 5.2 Mise en œuvre

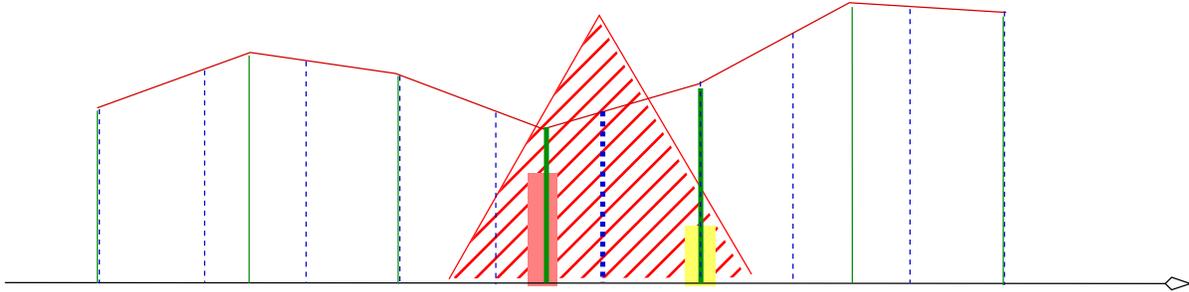
### Exemple :

- agrandissement d'un facteur  $s = \frac{3}{2}$
- reconstruction + suréchantillonnage (facteur  $\frac{1}{s} = \frac{2}{3}$ )
- illustration avec le filtre tente (Bartlett – interpolation linéaire)



## Algorithme de reconstruction

- pour chaque point à reconstruire, appliquer l'inverse du facteur de zoom pour le ramener dans le domaine de l'image agrandir
- positionner le filtre en ce point et calculer les contributions des échantillons « atteints » par le filtre



- $I$  : image source de largeur  $W$
- $I'$  : image rééchantillonnée de largeur  $W' = s \times W$
- demi-largeur du filtre  $\varphi$  :  $FW$
- rééchantillonnage de la ligne  $i$  d'un facteur  $s (> 1)$  :

```
for (j' = 0; j' < W' - 1; j'++)  
{  
    j = j' / s  
    left = max(|j - FW|, 0)  
    right = min(|j + FW|, W - 1)  
    sigma = 0;  
    for (k = left; k <= right; k++)  
        sigma += I[i][k] * phi(k - j)  
    Troncature de sigma sur [0,1]  
    I'[i][j'] = sigma  
}
```