

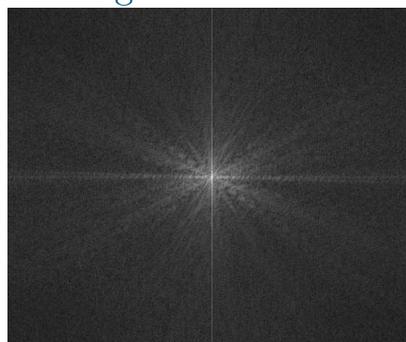
CES PAGES SONT DESTINÉES À FACILITER LA PRISE DE NOTES. ELLES SONT PRODUITES AUTOMATIQUEMENT À PARTIR DU SOURCE L^AT_EX/BEAMER DU DIAPORAMA SERVANT DE SUPPORT DE COURS. LA PRÉSENTATION ET LA MISE EN PAGE SONT PAR CONSÉQUENT APPROXIMATIVES.

Partie A — thème 4

Représentation fréquentielle des images 2D



Représentation spatiale : organisation géométrique de l'image projetée sur la rétine

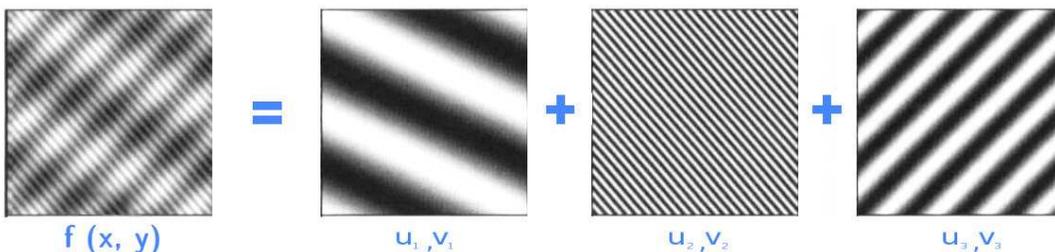


Représentation fréquentielle : prise en compte des variations au sein de la représentation spatiale

1 Transformée de Fourier 2D : quoi, pourquoi, comment

Quoi : changement d'espace de représentation

- on considère une image monochrome 2D décrite par une fonction $f(x, y)$
- ... pouvant s'exprimer comme une somme *d'oscillations sinusoïdales directionnelles*



- chaque oscillation peut être caractérisée par un couple (direction, fréquence) représentable par un vecteur (u_i, v_i)
- on décrit la contribution de chaque oscillation (u_i, v_i) par une fonction $F(u_i, v_i)$
- cette décomposition en somme de fréquences directionnelles est possible pour toute image $f(x, y)$
- la fonction $F(u, v)$ qui permet de la construire est sa transformée de Fourier

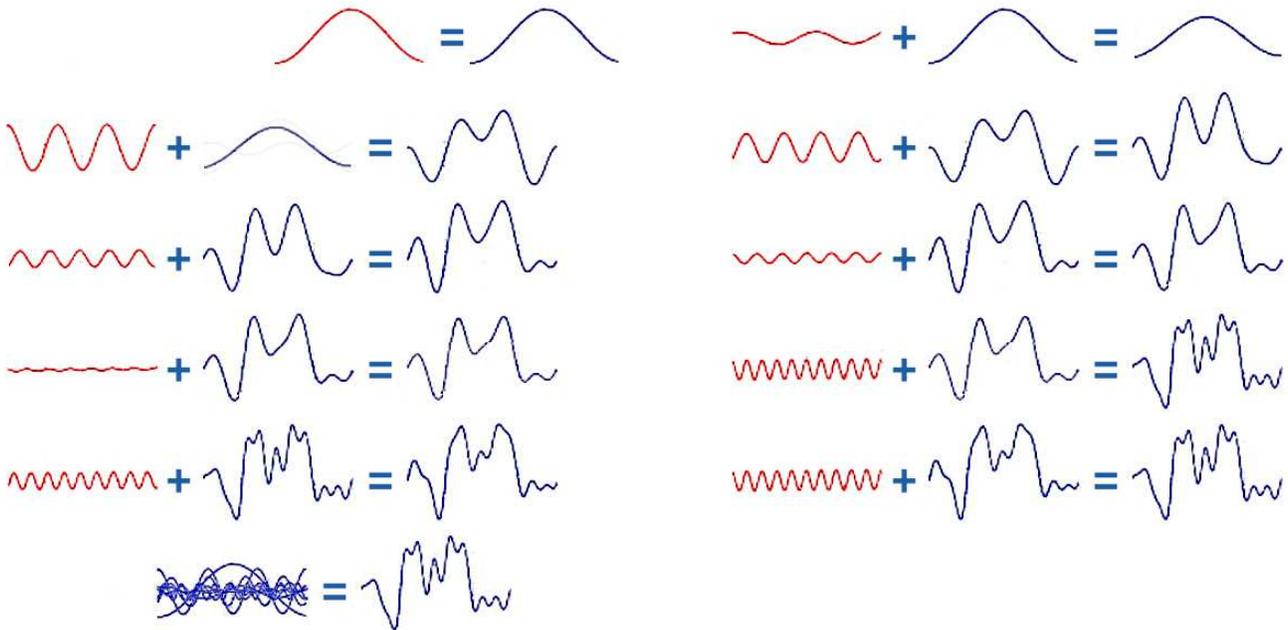
Pourquoi : pour exprimer et exploiter les caractéristiques fréquentielles de l'image

- fréquences basses : transitions lentes, zones homogènes...
- fréquences hautes : transitions rapides, détails...
- permet d'effectuer des traitements dans le domaine fréquentiel
 - analyse des caractéristiques de l'image
 - traitements restreints à certaines fréquences : suppression de défauts périodiques, etc.



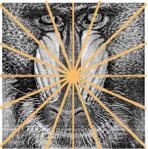
Comment : décomposition en somme de fréquences

- en 1D : somme de sinusoides



contribution de chaque sinusöide : fréquence \rightarrow amplitude, phase

- en 2D, on effectue cette construction dans toutes les directions



- transformation de Fourier 2D : outil mathématique qui permet de calculer cette décomposition

$$\mathcal{F} : f(x, y) \rightarrow F(u, v)$$

2 Spectres d'amplitude et de phase

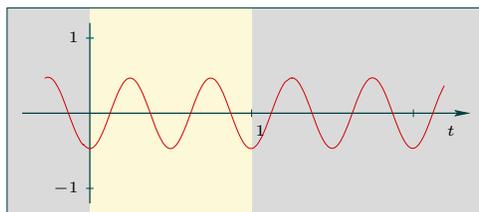
Fréquence, amplitude et phase

— en 1D, une sinusoïde

$$s(t) = a \sin(2\pi ut + \varphi)$$

est caractérisée par le triplet a, u, φ :

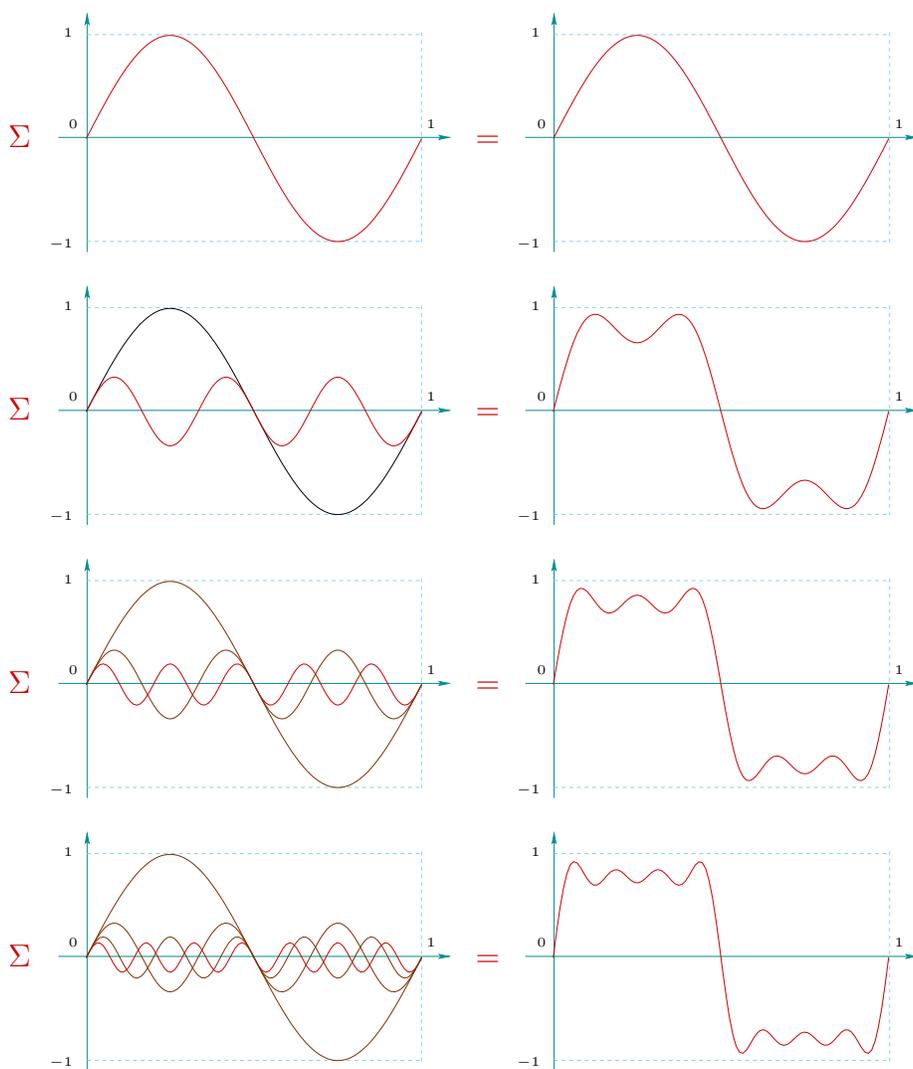
u	fréquence	2
a	amplitude	0.5
φ	phase	$-0.25 \times 2\pi$

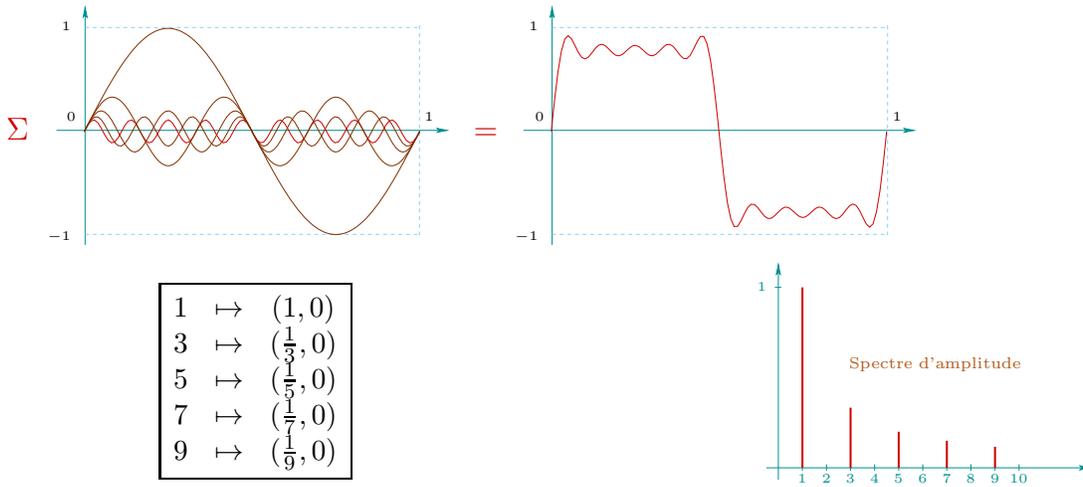


— à chaque fréquence u est associée à une paire a, φ :

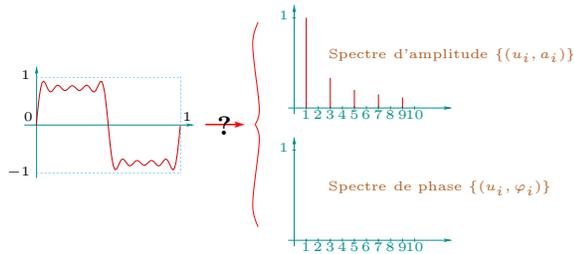
$F(u)$	\mapsto	(a, φ)

Spectre d'amplitude et de phase d'une somme de sinusoïdes





- prolongement de la construction à l'infini : signal carré
- cas général : spectre d'amplitude et spectre de phase
- retrouver les spectres d'amplitude et de phase d'une somme de sinusoides $f(t)$



- calculable par la transformation de Fourier : $\mathcal{F}(f) = F$
 - en 1D : $F(u) \rightarrow (a, \varphi)$
 - spectre d'amplitude $A : u \rightarrow a$
 - spectre de phase $H : u \rightarrow \varphi$
 - en 2D : $F(u, v) \rightarrow (a, \varphi)$
 - spectre d'amplitude $A : (u, v) \rightarrow a$
 - spectre de phase $H : (u, v) \rightarrow \varphi$
- la transformation de Fourier est généralisable à toute fonction réelle intégrable

3 Transformation de Fourier 1D

3.1 Développement en série de Fourier

1807 : Joseph Fourier affirme qu'une fonction périodique **arbitraire** peut s'écrire comme une **somme infinie de fonctions sinusoidales**

$$\begin{aligned}
 f(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(2\pi n u_0 t) + B_n \sin(2\pi n u_0 t) \\
 &= \boxed{a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cdot \cos(2\pi n u_0 t - \varphi_n)} \\
 &\text{avec } a_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \text{ et } \tan(\varphi_n) = \frac{B_n}{A_n}
 \end{aligned}$$





— près d'un siècle pour aboutir à une théorie finalisée qui révolutionne les mathématiques et la physique

tout signal périodique physiquement réalisable s'écrit comme la somme d'une porteuse et de fréquences harmoniques multiples d'une fréquence fondamentale u_0

3.2 Formulation complexe de la série de Fourier

La construction de la transformation de Fourier passe par la formulation complexe des formes trigonométriques.

— formule d'Euler : $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$

— sommes d'exponentielles complexes :

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \\ \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \end{cases}$$

— outil de réécriture de la trigonométrie, par exemple :

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta &= \frac{(e^{i\theta} + e^{-i\theta})^2}{4} + \frac{(e^{i\theta} - e^{-i\theta})^2}{-4} \\ &= \frac{(e^{i\theta^2} + 2e^{i\theta}e^{-i\theta} + e^{-i\theta^2}) - (e^{i\theta^2} - 2e^{i\theta}e^{-i\theta} + e^{-i\theta^2})}{4} \\ &= \frac{4e^{i\theta}e^{-i\theta}}{4} \\ &= e^0 = 1 \end{aligned}$$

Série de Fourier à coefficients complexes

$$\begin{cases} f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(2\pi n u_0 t - \varphi_n) \\ \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{2} \left(e^{i(2\pi n u_0 t - \varphi_n)} + e^{-i(2\pi n u_0 t - \varphi_n)} \right) \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \left(e^{2i\pi n u_0 t} + e^{-2i\pi n u_0 t} \right) \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n e^{2i\pi n u_0 t} + \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n e^{2i\pi n u_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{2i\pi n u_0 t} \end{aligned}$$

— le coefficient c_n décrit les spectres d'amplitude et de phase de la fréquence nu_0

— « apparition » de fréquences négatives (redondance due à la représentation complexe)

3.3 Transformée de Fourier de f(t)

— les coefficients c_n décrivent la contribution de la fréquence $u_n = nu_0$

$$u_n \mapsto \begin{cases} a_n = |c_n| \\ \varphi_n = \arg(c_n) \end{cases}$$

— on montre que la transformée de Fourier $F = \mathcal{F}(f)$ de la fonction f est définie par

$$c_n = F(nu_0) = u_0 \int_{-1/2u_0}^{1/2u_0} f(t) e^{-i2\pi nu_0 t} dt$$

— $F(u)$ fournit les spectres d'amplitude et de phase de $f(t)$

3.4 Extension à des fonctions non périodiques

— comment généraliser à des fonctions non périodiques ?

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{2i\pi nu_0 t}$$

— idée : on fait tendre la période T vers l'infini

— $T \leftrightarrow \frac{1}{u_0}$: le pas de fréquence u_0 tend vers 0

— ensemble continu de fréquences couvrant tout le spectre $[-\infty, +\infty]$

— mathématiquement, on passe d'une somme discrète à une somme continue (intégrale)

— on peut montrer que

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} c_u e^{2i\pi ut} du$$

avec

$$c_u = F(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2i\pi ux} dx$$

Que signifie la présence des fréquences négatives ?

— on a vu qu'elles proviennent de la réécriture sous forme complexe

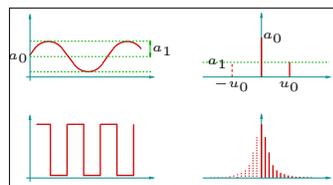
$$a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(2\pi nu_0 t - \varphi_n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{2i\pi nu_0 t}$$

— si la fonction f dont on calcule la transformée est une fonction réelle, les fréquences négatives n'apportent pas d'informations supplémentaires

— concrètement, le spectre est symétrique (redondant) :

$$F(u) = F(-u)$$

— exemples :



La transformation de Fourier 1D en cinq points

- un outil fondamental (mais pas unique) pour le traitement du signal
- $F(u)$ fournit les spectres d'amplitude et de phase de $f(t)$

$$u \mapsto \left(|F(u)|, \arg(F(u)) \right)$$

- la transformation de Fourier est linéaire

$$\mathcal{F}(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathcal{F}(f) + \mu \mathcal{F}(g)$$

- on peut construire la transformation inverse : $\mathcal{F}^{-1}(F) = f$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{2i\pi ut} du$$

- permet d'effectuer des traitements dans le domaine fréquentiel

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(u) \xrightarrow{\text{traitement fréquentiel}} F'(u) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} f'(t)$$

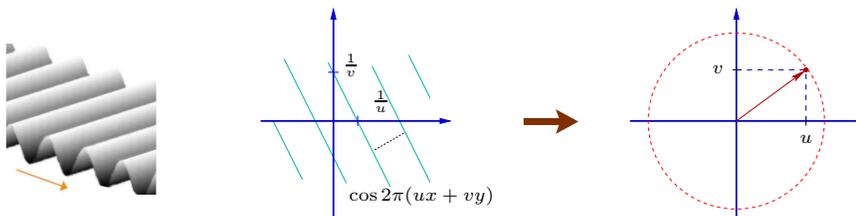


⊥ attention à préserver la symétrie du spectre

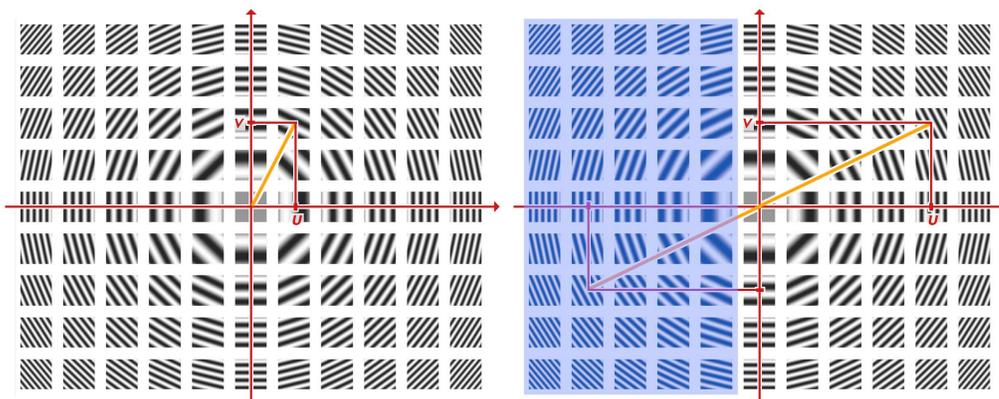
4 Application aux images 2D

4.1 Qu'est-ce qu'une fréquence 2D ?

- fréquence directionnelle dans le plan
- oscillation dans la direction du vecteur (u, v)
- la valeur de la fréquence est la norme de (u, v)



- ensemble des fréquences : base de l'espace de Fourier
- redondance (symétrie centrale)



4.2 Expression analytique de la transformée de Fourier 2D

— transformée directe :

$$F(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2i\pi ux} dx$$
$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)e^{-2i\pi(ux+vy)} dx dy$$

— transformée inverse :

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u)e^{2i\pi ut} du$$
$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v)e^{2i\pi(ux+vy)} du dv$$

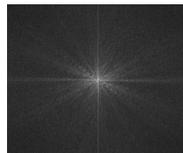
— image multicanal (e.g. RGB) : représentation fréquentielle canal par canal

4.3 Représentation du spectre d'amplitude

$$\mathcal{F} : I(x, y) \longrightarrow F(u, v)$$
$$A : (u, v) \longrightarrow |F(u, v)|$$



$I(x, y)$

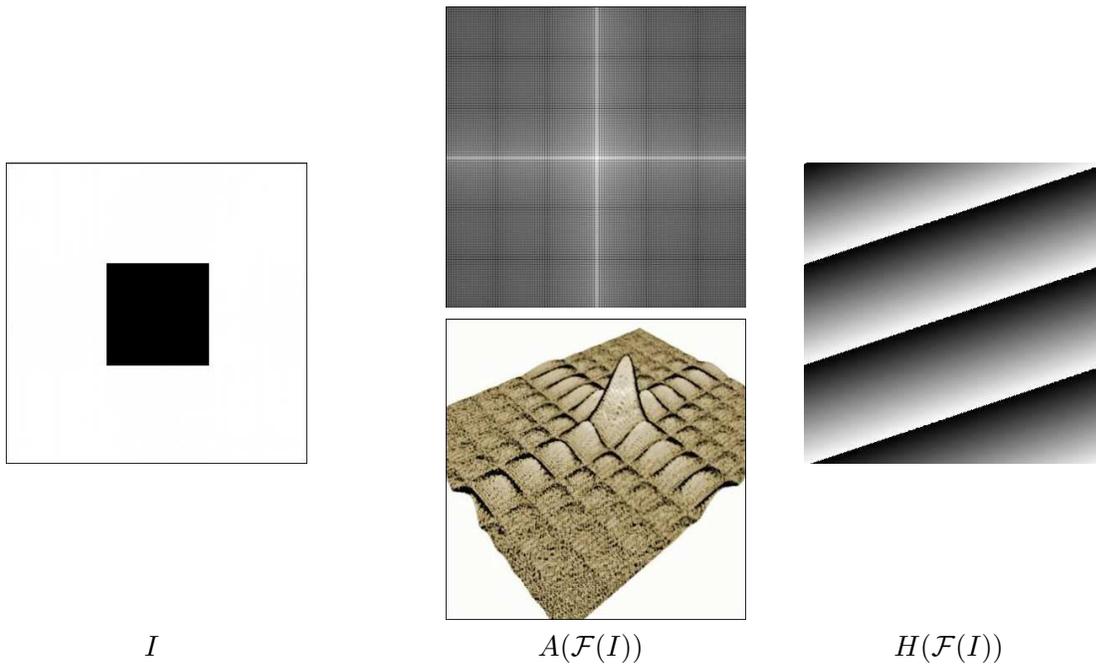


spectre d'amplitude de $F(u, v)$

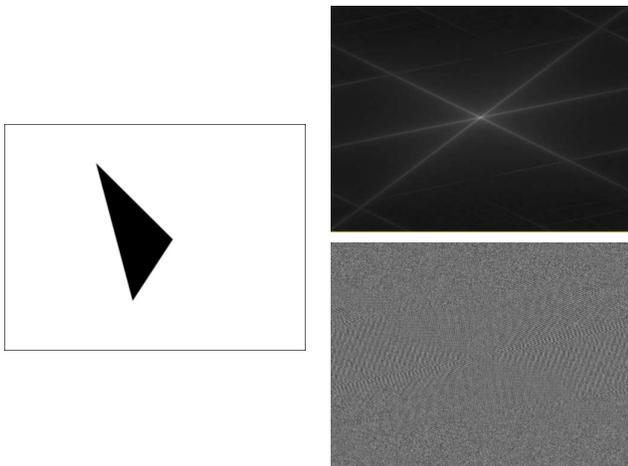
- chaque point (u, v) du spectre d'amplitude définit la contribution en amplitude de la fréquence directionnelle (u, v) dans l'image I
- visualisation en niveaux de gris : $[0, a_{max}] \longrightarrow [0, 255]$

4.4 Quelques exemples de représentation fréquentielle d'images 2D

Exemple 1 : signal « carré »

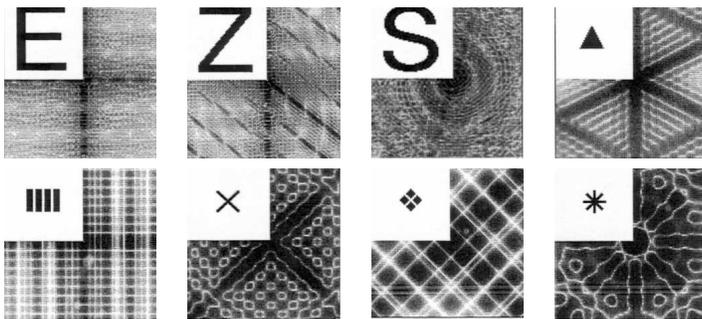


Exemple 2 : fréquences directionnelles dominantes

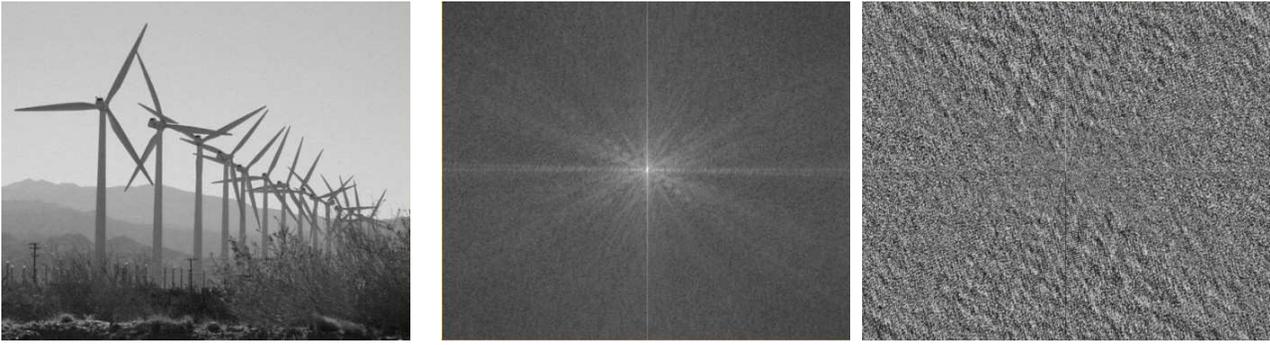


On retrouve sur le spectre d'amplitude des fréquences privilégiées dans les trois directions orthogonales aux cotés du triangle (sommets de fréquences nécessaires pour reconstruire la transition brusque — signal carré)

Exemple 3 : spectres d'amplitude de formes caractéristiques

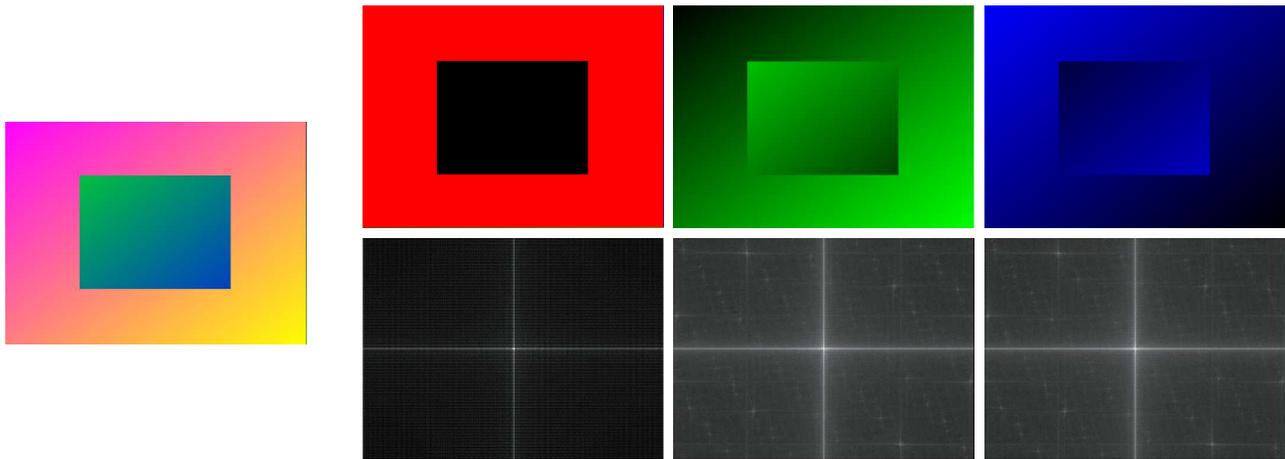


Exemple 4 : transformée de Fourier d'une image (monochrome) réelle



- on retrouve dans le spectre d'amplitude les directions privilégiées de l'image (horizon, mâts et pales des éoliennes)
- en imagerie optique, les informations portées par le spectre de phase ne sont pas exploitables de manière intuitive

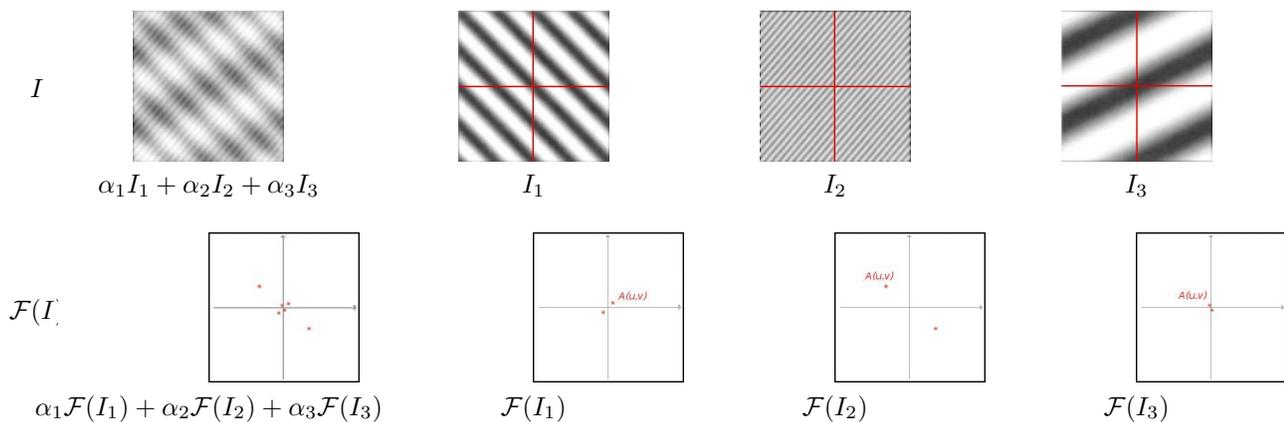
Exemple 5 : spectres d'amplitude d'une image RGB



- on retrouve pour le canal rouge le spectre de l'image précédente
- les spectres des canaux vert et bleu sont similaires (ils expriment des variations identiques à un déphasage près)

4.5 Illustration de la linéarité de la transformation de Fourier

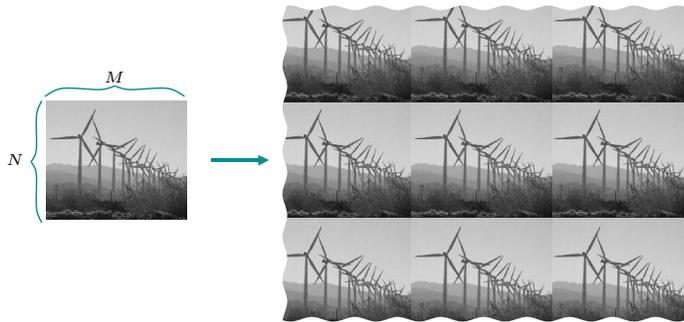
$$\mathcal{F}(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathcal{F}(f) + \mu \mathcal{F}(g)$$



5 Transformée de Fourier d'une image discrète

5.1 Formulation discrète de la transformation de Fourier

- images discrètes de taille $M \times N$
 - domaine **borné**
 - nombre **fini** de pixel
- **périodisation** de l'image : prolongement par réplication dans les deux directions



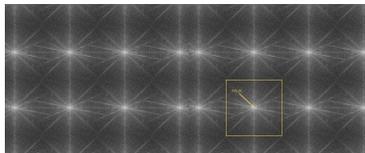
- **échantillonnage** de la transformée de cette image ($M \times N$ échantillons) par sommation sur une période

$$F(u, v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-2i\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})}$$

$$f(x, y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{2i\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})}$$

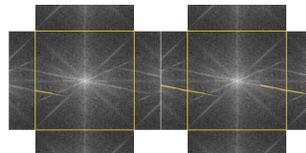
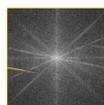
- $F(u, v)$ est également une **fonction périodique**, de période (M, N)

Illustration du phénomène de repliement du spectre



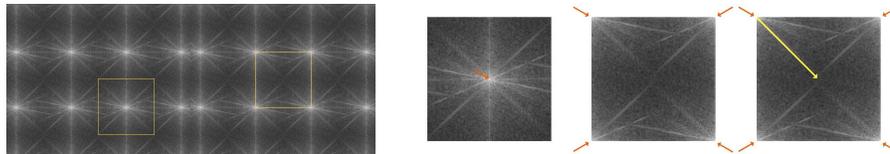
- la périodisation de l'image... ... produit une périodisation des spectres de Fourier
- par commodité, on retient une période centrée en $(0, 0)$ — modulo (M, N)

- le repliement du spectre permet de comprendre la présence de fréquence qui peuvent apparaître comme des anomalies



5.2 Recentrage des spectres

- représentation usuelle du spectre d'amplitude : origine $F(0,0)$ au centre de l'image
- la TDFD positionne la fréquence nulle aux coins de l'image
- nécessité d'effectuer un recentrage : translation de $(\frac{M}{2}, \frac{N}{2})$



Mise en œuvre du recentrage des spectres

$$\begin{aligned}
 F\left(u - \frac{M}{2}, v - \frac{N}{2}\right) &= \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-2i\pi\left(\frac{u-\frac{M}{2}}{M}x + \frac{v-\frac{N}{2}}{N}y\right)} \\
 &= \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-2i\pi\left(\left(\frac{u}{M} - \frac{1}{2}\right)x + \left(\frac{v}{N} - \frac{1}{2}\right)y\right)} \\
 &= \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-2i\pi\left(-\frac{1}{2}(x+y) + \left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)\right)} \\
 &= \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{i\pi(x+y) - 2i\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)} \\
 &= \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{i\pi(x+y)} e^{-2i\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)} \\
 &= \mathcal{F}\left(f(x, y) e^{i\pi(x+y)}\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 e^{i\pi(x+y)} &= e^{i\pi(x+y)} \\
 &= (\cos\pi + i \sin\pi)^{(x+y)} \\
 &= (-1)^{(x+y)}
 \end{aligned}$$

$$\boxed{F\left(u - \frac{M}{2}, v - \frac{N}{2}\right) = \mathcal{F}\left((-1)^{(x+y)} f(x, y)\right)}$$

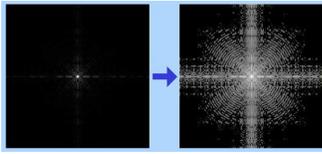
- recentrage du spectre de la TDFD de $f(x, y)$: **pré-multiplication** de $f(x, y)$ par $(-1)^{x+y}$

$$(-1)^{x+y} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & \cdots \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & \cdots \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & \cdots \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

5.3 Visualisation du spectre d'amplitude : $A(u, v) = |F(u, v)|$

- **dynamique** du spectre trop grande pour être visualisée sur 256 niveaux de gris
- **correction non linéaire** des valeurs du spectre avant échantillonnage en niveaux de gris, par exemple :

$$A'(u, v) = \left(\frac{A(u, v)}{A_{max}(u, v)} \right)^k \times 255 \quad (\text{on peut prendre } k \sim 0.1)$$



6 Mise en œuvre (efficace) de la transformation

6.1 Transformée de fourier rapide (FFT)

- méthode directe trop coûteuse
- FFT : stratégie de division récursive (cas simple : $2^n \times 2^n$)

$$O(n^2) \rightarrow O(n \log(n))$$

- Logiciel libre **FFTW**
 - MIT, Matteo Frigo and Steven G. Johnson.
 - compatible norme C99 depuis la version 3 (implémentation du type complexe)
 - $O(n \log(n))$ quelle que soit la taille de l'image (génération en Caml de code C adapté à chaque taille d'image)
 - bien documenté
 - <http://www.fftw.org/> (version 3.3.9)
- Mise en œuvre sur une image discrète I
 - conversion $I : D \rightarrow \mathbb{R}$ en image à valeur dans \mathbb{C} :

$$I_C(x, y) = I(x, y) + 0i$$

6.2 Étapes d'un traitement fréquentiel sur une image I avec FFTW

1. → **recentrage** : $I'(x, y) = (-1)^{(x+y)} I(x, y)$
 - **normalisation** par $\frac{1}{MN}$ (pas pris en compte par la bibliothèque)
2. → FFT appliquée à l'image **complexe** : $I' \rightarrow I'_C \rightarrow F$
3. → extraction des spectres d'amplitude A et de phase H :

$$F(u, v) = a + bi \rightarrow \begin{cases} A(u, v) = \sqrt{a^2 + b^2} \\ H(u, v) = \text{atan}\left(\frac{b}{a}\right) \end{cases}$$

4. → traitement fréquentiel : $A \rightarrow A'$ (**contrainte de symétrie**)
5. → reconstruction de l'image complexe F'

$$F'(u, v) = A'(u, v) \cos(H(u, v)) + i A'(u, v) \sin(H(u, v))$$

6. → FFT inverse : $F' \rightarrow I''_C \rightarrow I''$
7. → inversion du recentrage : $I'''(x, y) = (-1)^{(x+y)} I''(x, y)$